١٢



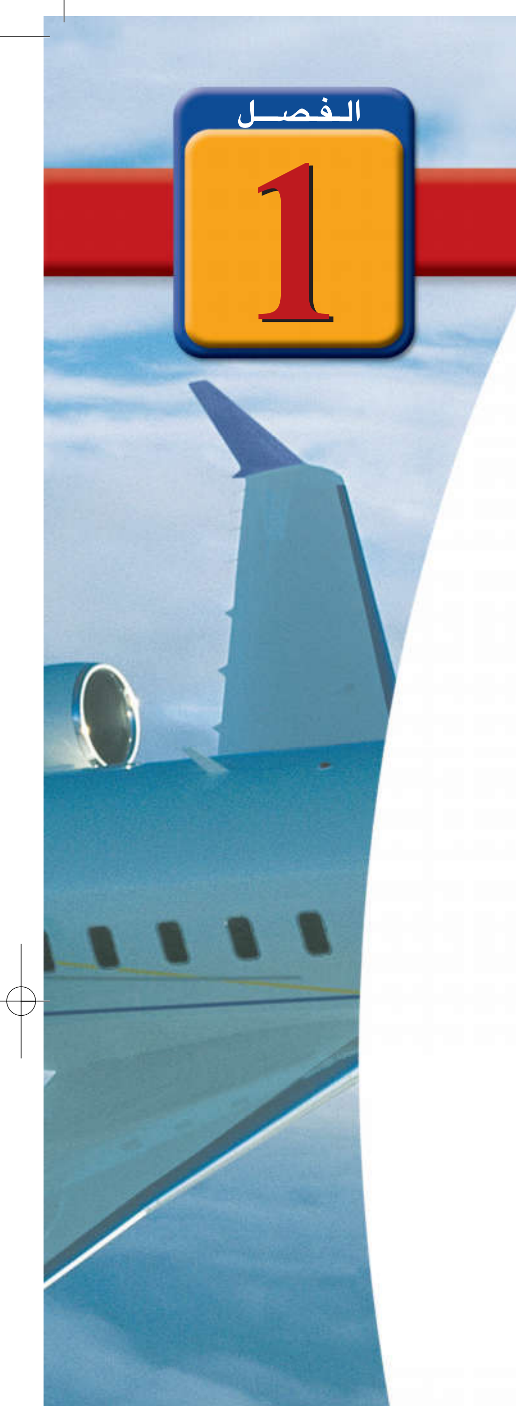
حكومة إقليم كوردستان ـ العراق
وزارة التربية ـ المديرية العامة للمناهج والمطبوعات

الرياضيات للجميع

كتاب الطالب
الصف الثاني عشر العلمي

الطبعة السادسة
٢٠١٥م / ٢٧١٥ كوردي / ١٤٣٦ هـ

الأشراف الفني على الطبع
عثمان پيرداود كواز
آمانج اسماعيل عبدي



الرسوم البيانية والنماذج الخطّية

Graphs and Linear Models

الفصل

2

النهايات (الغايات) Limits

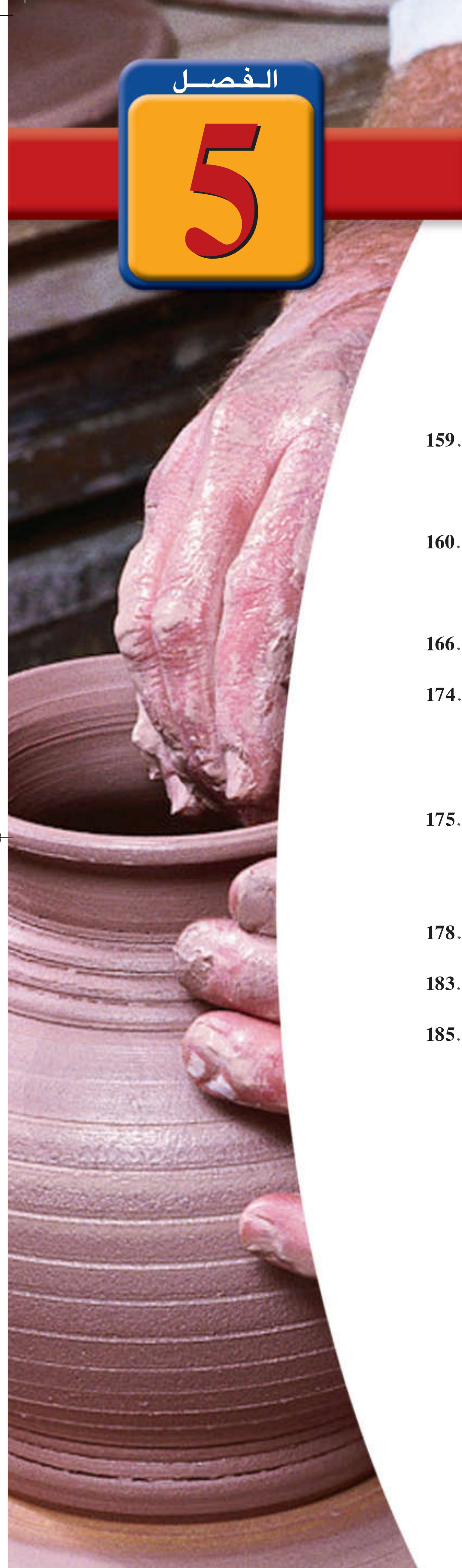


Derivative المشتقة

الفصل 4

تطبيقات الاشتقاق

Applications of Differentiation



Integration

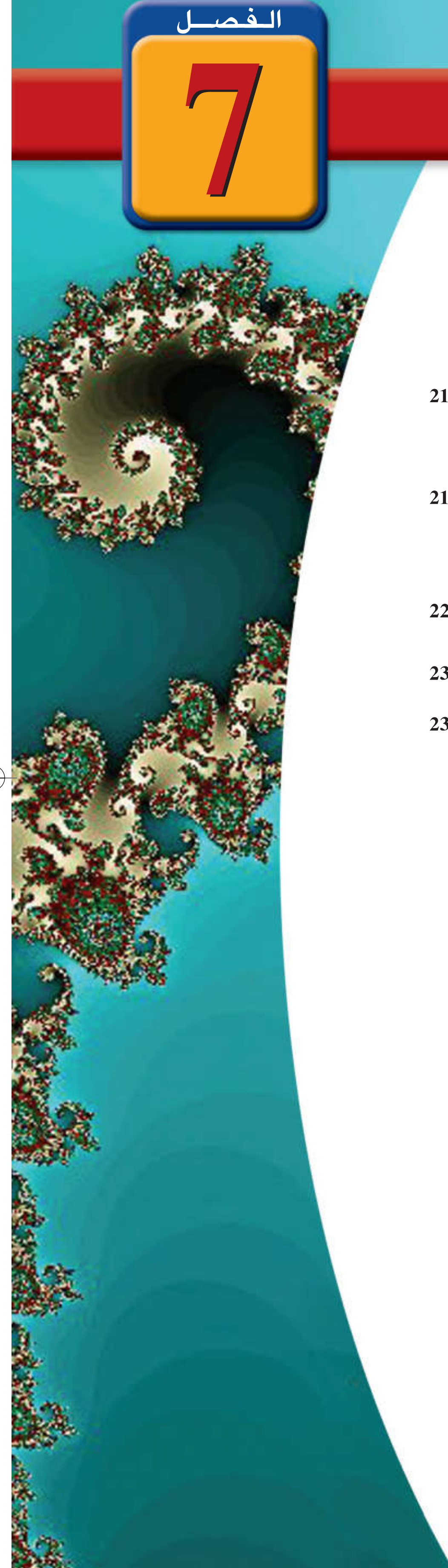


الفصل

6

القطوع المخروطية

Conic Sections



الأعداد المركَّبة والهندسة

Complex Numbers And Geometry

الفصل

1

الرسوم البيانية والنماذج الخطّية

Graphs and Linear Models

الفصل الأول

الدروس

من النماذج الواسعة الانتشار، النماذج الخطّية. وهي تُستعمل في الاقتصاد والصناعة وغيرها من الميادين. مثال على ذلك النموذج الذي يربط عرض جناحي الطائرة w بطولها l وهو $w = 1.2l - 60$ لبعض أنواع الطائرات.

هـل أنت مسـتعـد؟

المُـفْـرَدات

اربط كل عبارة في العمود الأيمن بتفسيرها في العمود الأيسر.

1. الدالّة
2. المتغيّر الحر
3. المتغيّر التابع
4. مجال الدالة f
5. دالة متفرِّعة القاعدة

(أ) مجموعة قيم x التي تسمح بحساب القيم $f(x)$.

(ب) متغيّر تتحدَّد قيمه تبعًا لقيم المتغيّر الحرّ في علاقة داليَّة.

(ج) دالّة تُعرَّفُ قاعدتها بأشكال مختلفة على فترات مختلفة.

(د) علاقة بين متغيّرين تُحدّد كل قيمة للأول قيمة وحيدة للآخر.

(هـ) مجموعة قيم $f(x)$ الممكنة.

(و) متغيّر يُحدِّد قيم المتغيّر التابع في علاقة داليَّة.

مجال الدالّة

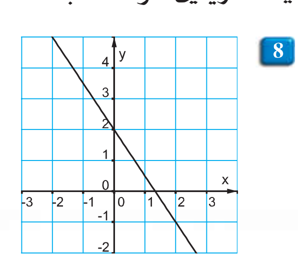
في التمارين من 2 إلى 7، جِد مجال الدالّة.

2. $f(x)=|x-1|+2$
3. $f(x)=-2+\sqrt{1-x}$
4. $f(x)=\sqrt{16-x^2}$
5. $f(x)=\sqrt[3]{2-x}$
6. $f(x)=\tan(2x-\pi)$
7. $f(x)=x^{2/5}$

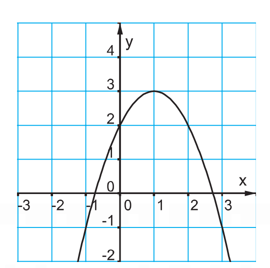
قراءة البيانات

في التمرينين 8 و 9، اكتب دالّة متفرِّعة القاعدة للبيان.

8.



9.



1-1 الرسوم البيانية والنماذج

Graphs and Models

الأهداف

- يرسم بيان علاقة استنادًا إلى معادلتها.
- يجد تقاطعات بيان دالة مع محوري الإحداثيات.
- يختبر تناظر بيان دالة حول المحور y أو نقطة الأصل في المستوي الإحداثي.
- يجد نقاط التقاطع لبيانيَ دالّتين.

المفردات Vocabulary

نقطة حل	Solution point
جدول قيم	Table of values
تقاطع أفقي	x-Intercept
تقاطع عمودي	y-Intercept
ميل	Slope
تناظر	Symmetry
نقطة تقاطع	Point of intersection
نموذج رياضي	Mathematical model



رينيه ديكارت (1596–1650)
René Descartes

قدم ديكارت مساهمات كثيرة في تطوير الفلسفة والعلوم والرياضيات وإليه تعود فكرة تمثيل نقطة في المستوي بزوج مرتب من عددين، وفكرة تمثيل المنحنيات بمعادلات جبرية أو العكس. وقد شرح أفكاره هذه في كتابه La Géométrie المنشور سنة 1637.

بيان الدالّة

أحدث عالم الرياضيات الفرنسي رينيه ديكارت، في العام 1637 للميلاد، ثورة في دراسة الرياضيات، عندما ربط بين فرعيها الأساسيين: الجبر والهندسة. فقد أصبح ممكنًا، باستعمال مستوي ديكارت الإحداثي، التعبير جبريًّا عن المفاهيم الهندسية وتمثيل المفاهيم الجبرية هندسيًّا. سمحت قوّة هذه المقاربة بتطوير الكثير من موضوعات حساب التفاضل والتكامل خلال قرن من الزمن.

سوف نتبع في هذا الكتاب مقاربة مماثلة في دراستنا لحساب التفاضل والتكامل. ونعرض أفكار هذا الفرع من الرياضيات بيانيًّا وجبريًّا وعدديًّا، لكي تتمكّن من إدراك مفاهيمه الأساسية.

استعمل المعادلة $3x+y=7$. تشكّل النقطة $(2, 1)$ **نقطة حل** لهذه المعادلة لأن التعويض عن x بـ 2 وعن y بـ 1 يُحوّل المعادلة إلى مساواة. لهذه المعادلة حلول أخرى كثيرة مثل $(1, 4)$ وَ $(0, 7)$.

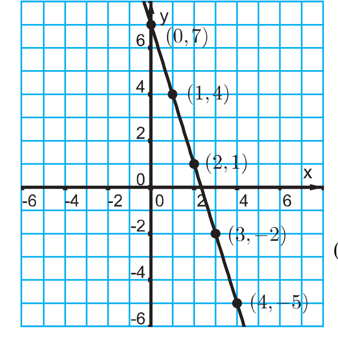
لكي تجد جميع الحلول بشكل منهجيّ، حُلّ المعادلة بالنسبة إلى y تحصل على

$$y=7-3x \quad \text{مقاربة جبرية}$$

ثم أنشئ **جدول قيم** بالتعويض عن x بعدة قيم.

مقاربة عددية

x	0	1	2	3	4
y	7	4	1	−2	−5



يُمكنك القول، استنادًا إلى الجدول، أن $(0, 7)$ وَ $(1, 4)$ و $(2, 1)$ و $(3, -2)$ وَ $(4, -5)$ حلول للمعادلة الأساسية $3x+y=7$. لكنّ هذه المعادلة، مثل كثير من المعادلات، لها عدد غير محدود من الحلول. كلّ حلّ يحدّد نقطة في المستوي الإحداثي. مجموعة هذه النقاط الحلول تشكّل **بيان المعادلة**.

تـذكّـرْ

يتطلب رسم مستقيم معرفة نقطتين يمر بهما.

سوف تتعلّم في هذا الكتاب عدّة طرائق لرسم بيانات الدوال والمعادلات. من هذه الطرائق، وهي أبسطها، رسم عدد من النقاط الحلول بما يكفي لتحديد هيئة البيان، ثم وصل هذه النقاط بخط مناسب.

مثـــال 1 رسم بيان بالنقاط

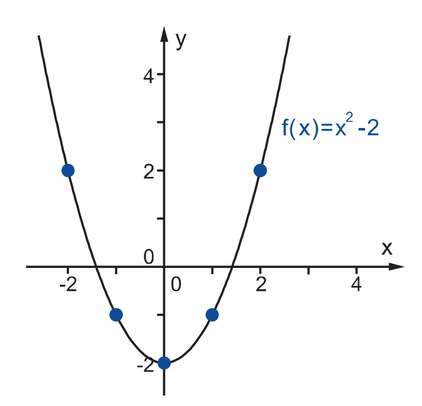
ارسم بيان الدالّة $f(x)=x^2-2$.

الحـل

ابدأ بإنشاء جدول قيم.

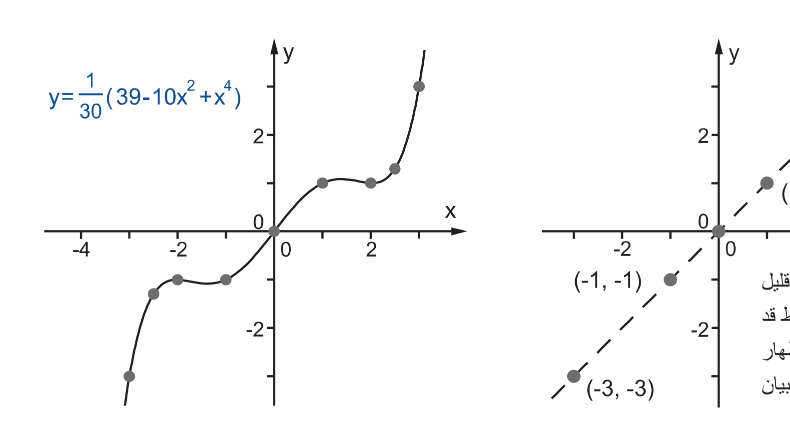
x	-2	-1	0	1	2	3
y	2	-1	-2	-1	2	7

مثّل النقاط الواردة في الجدول، ثم اربط بينها بخط منحن مناسب، كما هو مبيّن في الشكل المقابل. هذا البيان **هو قطع مكافئ**. إنه أحد القطوع المخروطية التي ستتعلمها في الفصل السادس.



نقطة مراقبة **1.** ارسم بيان الدالّة $f(x)=1-x^2$.

رسم البيانات بالنقاط أمر سهل كما رأيت، لكنه يشكو بعض العيوب. فأحيانًا، تحتاج إلى رسم نقاط كثيرة لتكوّن فكرة جيدة عن هيئة البيان. سترى، عبر مثال الدالّة $f(x)=\frac{1}{30}x(39-10x^2+x^4)$ أن رسم عدد قليل من النقاط يؤدي بك إلى استنتاجات خطأ. فإذا رسمت النقاط $(-3,-3)$ وَ$(-1,-1)$ وَ $(0,0)$ وَ $(1,1)$ وَ $(3,3)$ ستستنتج أن بيان هذه الدالة هو خط مستقيم كما يُظهر البيان الأيمن في الصفحة التالية. إلا أن رسم نقاط إضافية يُبيّن لك أن البيان هو، في الحقيقة، أعقد من ذلك كما يُظهر البيان الأيسر من الصفحة التالية.



تقاطعات البيان

من النقاط الحلول، نقاط يُمكن إيجادها بسهولة. إنها النقاط التي يساوي أحد إحداثييها 0. تُسمّى هذه النقاط **تقاطعات** البيان. فالنقطة التي إحداثيّها x يساوي 0، أي النقطة $(0, b)$، هي نقطة تقاطع بيان الدالة مع المحور y. إنها **تقاطع عمودي**. والنقاط التي إحداثيها الثاني يساوي 0، أي النقاط $(a, 0)$، هي نقاط تقاطع بيان الدالة مع المحور x. إنها **التقاطعات الأفقية**.

الإحداثيات x التي تمثِّل التقاطعات الأفقية لبيان الدالة f هي جذور المعادلة $f(x)=0$. يُمكن أن لا يكون للدالة تقاطعات أفقية، أو أن يكون لها تقاطع واحد أو أكثر. أما الإحداثيات x للتقاطعات العمودية فهي $f(0)$ إذا كان 0 ينتمي إلى مجال الدالة. ينتج من ذلك، ومن خصائص الدالة، أن للدالة تقاطعًا عموديًّا واحدًا على الأكثر.

مثـــال 2 إيجاد التقاطعات الأفقية والعمودية

جِد التقاطعات الأفقية والعمودية لبيان الدالّة $f(x)=x^3-4x$

الحـل

لتجد التقاطعات الأفقية لبيان الدالّة $f(x)=x^3-4x$ حُل المعادلة.

$$f(x)=0$$

$$x^3-4x=0$$

$$x(x-2)(x+2)=0$$

جذور المعادلة هي 2– وَ 0 وَ 2. هناك، إذن، 3 تقاطعات أفقية هي $(-2, 0)$ وَ $(0, 0)$ وَ $(2, 0)$.

بما أن 0 ينتمي إلى مجال الدالة، فإن لبيانها تقاطعًا عموديًّا واحدًا هو $(0, f(0))$ أو $(0, 0)$.



2. جدِ التقاطعات الأفقية والعمودية لبيان الدالة $f(x)=x^4-1$.

تكنولوجيا استعملت في المثال 2 طريقة جبرية لإيجاد التقاطعات. إذا تعذّر عليك استعمال الجبر لإيجاد التقاطعات، استعمل الطريقة البيانية لذلك، عن طريق تحديد نقاط تقاطع بيان الدالة مع محورَي الإحداثيات.

تناظر بيانات الدوال

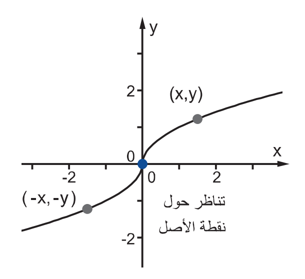


الحد الثابت في معادلة دالة حدودية هو ناتج ضرب عدد في $x^0 = 1$ وَ 0 عدد زوجي.

إذا عرفت أن بيان الدالة متناظر بالنسبة إلى مستقيم أو نقطة، فمن شأن ذلك أن يجعل رسم هذا البيان أسهل. ما عليك عندها إلا رسم نصف البيان ثم إكماله باستعمال التناظر.

يُمكنك استعمال النوعين التاليين من التناظر.

1. التناظر بالنسبة إلى المحور y: يكون بيان الدالّة f متناظرًا بالنسبة إلى المحور y، إذا كانت f تحقّق $f(-x) = f(x)$، لكل قيم x الواقعة في مجال الدالة، أي إذا كانت دالّة **زوجية**.

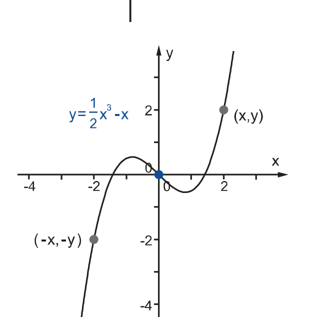


2. التناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل: يكون بيان الدالّة متناظرًا بالنسبة إلى نقطة الأصل، إذا كانت f تحقّق $f(-x) = -f(x)$، لكل قيم x الواقعة في مجال الدالة، أي إذا كانت دالّة **فردية**.

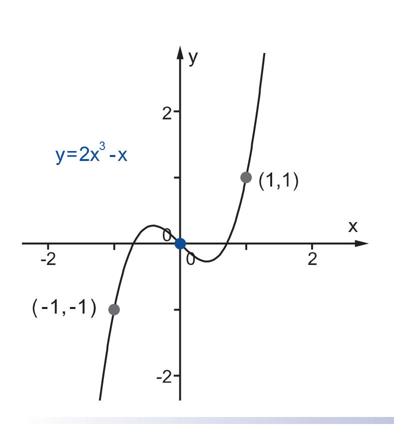
اختبار التناظر

1. يكون بيان الدالّة متناظرًا بالنسبة إلى المحور y إذا كانت الدالّة زوجية.
2. يكون بيان الدالّة متناظرًا بالنسبة إلى نقطة الأصل إذا كانت الدالّة فردية.

يكون بيان دالّة حدودية متناظرًا بالنسبة إلى المحور y، إذا كانت درجات جميع الحدود، غير الحد الثابت، في معادلتها، درجات زوجية. فبيان الدالّة $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 2$ متناظر بالنسبة إلى المحور y. كما أن بيان دالّة حدودية يكون متناظرًا بالنسبة إلى نقطة الأصل إذا كان الحد الثابت في معادلتها يساوي 0 وكانت درجات جميع الحدود في هذه المعادلة درجات فردية. مثال ذلك: بيان الدالّة $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$ متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل.



مثـــال 3 اختبار التناظر حول نقطة الأصل



بيّن أن بيان الدالّة $f(x)=2x^3-x$ متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل.

الحل

يكفي أن تُبيّن أن الدالّة فردية.

$$f(-x)=2(-x)^3-(-x)=-2x^3+x$$
$$=-(2x^3-x)=-f(x)$$

وذلك لكل قيم x .

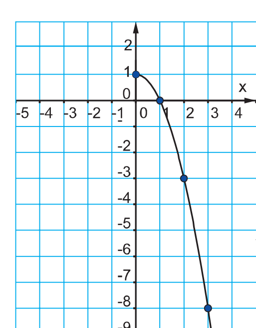


3. بيّن أن بيان الدالة $f(x)=2x^4-x^2+2$ متناظر بالنسبة إلى المحور y.

مثـــال 4 استعمال التقاطعات والتناظر لرسم بيانات الدوال

ارسم بيان الدالّة $f(x)=-x^2+1$.

الحل



البيان متناظر بالنسبة للمحور y لأن الدالّة زوجية:

$$f(-x)=-(-x)^2+1=-x^2+1=f(x)$$

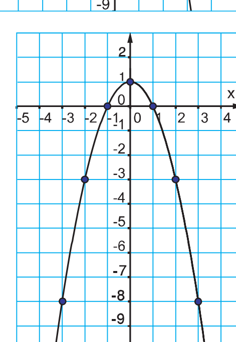
يكفيك إذن، أن ترسم نصف البيان العائد إلى قيم x الموجبة ثم صورة هذا النصف بالانعكاس حول المحور y.

حدِّد تقاطعات بيان الدالّة.

التقاطعات العمودية: هناك تقاطع عمودي واحد عند النقطة $(0, 1)$.

التقاطعات الأفقية: عليك حل المعادلة $f(x)=0$ أو $-x^2+1=0$.

لهذه المعادلة جذران هما $x=-1$ وَ $x=1$. لبيان الدالة، إذًا، تقاطعان أفقيان عند النقطتين $(-1, 0)$ وَ $(1, 0)$



حدِّد نقاطًا أخرى على الجزء الأيمن من البيان:

$(1, f(1))$ أو $(1, 0)$، $(2, f(2))$ أو $(2, -3)$ ،

$(3, f(3))$ أو $(3, -8)$.

ارسم النصف الأيمن من البيان:

أكمل رسم البيان باستعمال الانعكاس حول المحور y.



نقطة مراقبة **4.** ارسم بيان الدالّة $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

نقاط التقاطع

كل نقطة في المستوي الإحداثي مشتركة بين بيانَيّ دالّتَيْن هي **نقطة تقاطع** لبيانَيّ هاتَيْن الدالّتَيْن. لإيجاد نقاط تقاطع بيانَيّ دالّتَيْن f وَ g، حُلّ المعادلة $f(x)=g(x)$. جذور هذه المعادلة هي الإحداثيات x لنقاط التقاطع.

مثـــال 5 إيجاد نقاط التقاطع لدالَّتَيْن

جِد نقاط تقاطع بيانَيِ الدالّتَيْن $f(x)=x^2-3$ وَ $g(x)=x-1$.

الحل

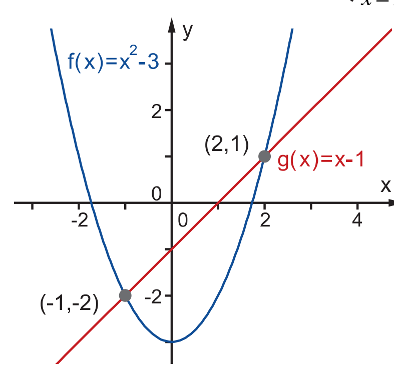
ابدأ بحل المعادلة $f(x)=g(x)$ أو $x^2-3=x-1$ التي تؤول إلى $x^2-x-2=0$.

لهذه المعادلة التربيعية جذران هما $x=-1$ وَ $x=2$.

يتقاطع بيانا الدالّتَيْن عند النقطتَيْن:

$(-1, f(-1))=(-1, g(-1))=(-1, -2)$

وَ $(2, f(2))=(2, g(2))=(2, 1)$



تحقَّق مما توصَّلت إليه عن طريق رسم بيانَيِ الدالّتَيْن وتحديد نقاط تقاطعهما.



نقطة مراقبة **5.** جِد نقاط تقاطع بيانَيِ الدالّتَيْن $f(x)=x^3-x$ وَ $g(x)=\frac{1}{4}(x^2-1)$.

مثـــال 6 إيجاد الدالة صاحبة جدول قيم

جِد قيمة k لكي يكون الجدول جدول قيم لدالة $f(x)=-x^2+kx-1$.

x	-1	0	3
y	-4	-1	-8

الحل

$-4=f(-1)=-(-1)^2+k(-1)-1=-k-2$ وبالتالي $k=2$. من ناحية أخرى،

$f(0)=-0^2+k(0)-1=-1$ وَ $f(3)=-(3)^2+2\times(3)-1=-10+6=-4$

يكون الجدول جدول قيم للدالة $f(x)=-x^2+kx-1$ إذًا $k=2$.

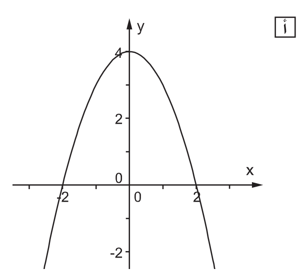


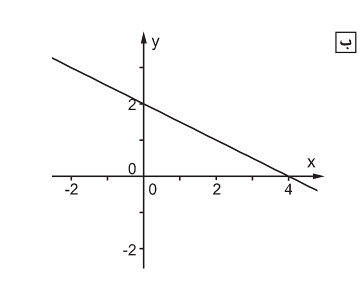
نقطة مراقبة **6.** جِد قيمة k لكي يكون الجدول جدول قيم للدالة $f(x)=\frac{-x+1}{kx}$.

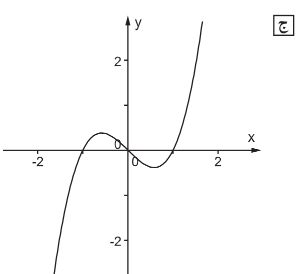
x	-3	1	2
y	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$

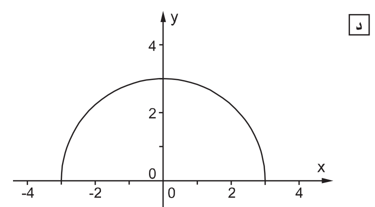
1-1 التمارين

في التمارين من 1 إلى 4، حدّد بيان الدالّة.

أ


ب


ج


د


1 $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$ **2** $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

3 $f(x)=4-x^2$ **4** $f(x)=x^3-x$

في التمارين من 5 إلى 10، ارسم بيان الدالّة بالنقاط.

5 $f(x)=6-2x$ **6** $f(x)=(x-3)^2$ **7** $f(x)=|x+2|$

8 $f(x)=\sqrt{x+2}$ **9** $f(x)=\frac{2}{x}$ **10** $f(x)=\frac{1}{x-1}$

في التمارين من 11 إلى 14، جِد تقاطعات بيان الدالّة مع محورَي الإحداثيات.

11 $f(x)=x^2+x-2$ **12** $f(x)=x^2\sqrt{25-x^2}$

13 $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2+1}$ **14** $f(x)=\frac{x^2+3x}{(3x+1)^2}$

في التمارين من 15 إلى 20، حدّد إن كان بيان الدالّة متناظرًا بالنسبة إلى المحور y أو إلى نقطة الأصل.

15 $f(x)=x^2-2$ **16** $f(x)=x^2-x$ **17** $f(x)=\frac{4}{x}$

18 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ **19** $f(x)=|x^3+x|$ **20** $f(x)=1-\sqrt{x+3}$

في التمارين من 21 إلى 24، جِد نقاط تقاطع بيانَي الدالّتيْن.

21 $f(x)=2-x$ وَ $g(x)=2x-1$ **22** $f(x)=6-x^2$ وَ $g(x)=4-x$

23 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ وَ $g(x)=-x^2+3x-1$

24 $f(x)=-|2x-3|+6$ وَ $g(x)=6-x$

25 **نقطة المنفعة** يقول الاقتصاديون أن ربحية مؤسسة بلغت **نقطة المنفعة** إذا تساوت كلفة الإنتاج ومردود البيع. جد نقطة المنفعة لمؤسسة دالّةٌ كلفتها $C=5\sqrt{x}+10000$ ودالّة مردودها $R=3x$.

حول المفاهيم

26 اكتب معادلة دالّة، تقاطعاتها الأفقية $x=-2$ ، $x=4$ ، $x=6$.

27 يُبيّن كل جدول نقاط حلول لمعادلة من المعادلات الأربع:

أ $y=kx+5$ ب $y=x^2+k$ ج $y=kx^{\frac{3}{2}}$ د $xy=k$

حدّد جدول كل معادلة، وحدّد قيمة k. وضّح طريقةَ عملك.

*

x	1	4	9
y	3	24	81

**

x	1	4	9
y	7	13	23

***

x	1	4	9
y	36	9	4

****

x	1	4	9
y	−9	6	71

صواب أم خطأ؟ في التمارين من 28 إلى 31، اذكر إن كانت المقولة صوابًا فعلّله، أو خطأ فأثبته بمثال مضاد.

28 إذا وقعت النقطة $(1, -2)$ على بيان متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل ، فإن النقطة $(-1, -2)$ تقع على هذا البيان أيضًا.

29 إذا وقعت النقطة $(1, -2)$ على بيان متناظر بالنسبة إلى المحور y، فإن النقطة $(-1, -2)$ تقع على هذا البيان أيضًا.

30 إذا كان $b^2-4ac>0$ وَ $a\neq 0$ ، فإن لبيان الدالّة $f(x)=ax^2+bx+c$ تقاطعَين أفقيَّين مختلفَين.

31 إذا كان $b^2-4ac=0$ وَ $a\neq 0$ ، فإن لبيان الدالّة $f(x)=ax^2+bx+c$ تقاطعًا أفقيًّا واحدًا.

32 جِد معادلة البيان الذي يتألف من جميع نقاط المستوي الإحداثي (x, y) التي تبعد عن نقطة الأصل ضعف بُعدها عن النقطة $(0, 3)$.

2-1 النماذج الخطّية ومعدّلات التغيّر
Linear Models and Rates of change

الأهداف

- يجد ميل مستقيم بمعرفة نقطتَيْن يمر بهما.
- يكتب معادلة مستقيم بمعرفة ميله ونقطة يمر بها.
- يفسّر الميل، كنسبة أو كمعدّل تغيّر، في مسائل من الحياة اليومية.
- يرسم مستقيمًا معادلته مكتوبة على صورة الميل – التقاطع.
- يكتب معادلة مستقيم مواز لمستقيم معيّن أو متعامد معه.

المفردات Vocabulary

ميل Slope

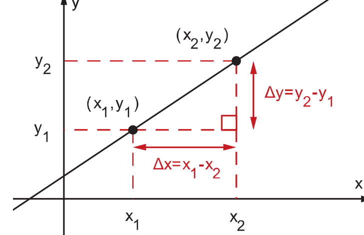
صورة الميل – النقطة Slope - point form

صورة الميل – التقاطع Slope - Intercept form

الصورة العامة General form

المعدّل الوسطي للتغيّر Average rate of change

ميل المستقيم



عندما تتحرّك نقطة على مستقيم غير عمودي تحرُّكًا مداه الأفقي وحدة واحدة من اليسار إلى اليمين، تصعد النقطة أو تهبط وفقًا لوضع المستقيم. ميل المستقيم هو عدد الوحدات التي تصعدها (أو تهبطها) النقطة نتيجة لهذه الحركة. استعمل نقطتَيْن (x_1, y_1) وَ (x_2, y_2) على المستقيم.

كلما تحرّكت نقطة على المستقيم من اليسار إلى اليمين تحرُّكًا أفقيًّا مداه $\Delta x=x_2-x_1$ وحدة، تحرّكت النقطة عموديًّا تحرُّكًا مداه $\Delta y=y_2-y_1$ وحدة، (Δ، اقرأ دلتا Delta، هو حرف يوناني. وتشكّلُ كل من الكتابتين Δx وَ Δy رمزًا واحدًا رغم كونها تتألف من حرفين).

تعريف ميل المستقيم

ميل المستقيم غير العمودي المار في النقطتين (x_1, y_1) وَ (x_2, y_2) هو

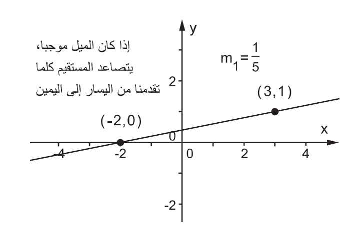
$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{حيث} \quad x_2 \neq x_1$$

ميل المستقيم العمودي غير مُعرّف.

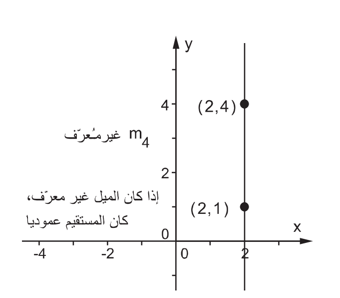
لاحظْ بشأن المستقيم المار في نقطتين (x_1, y_1) وَ (x_2, y_2) ، أن

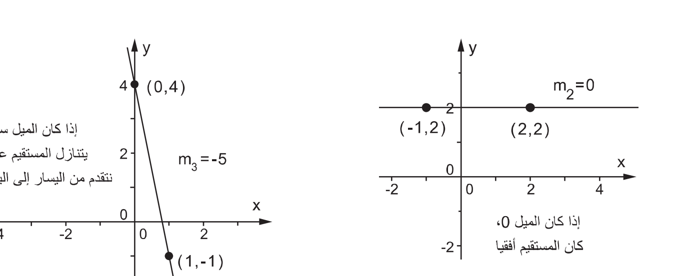
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-(y_2-y_1)}{-(x_2-x_1)}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

وهكذا، لا يؤثر اختيار النقطة الأولى والنقطة الثانية في النتيجة.



يُظهر الشكل أدناه 4 مستقيمات: أولها ميله موجب، وثانيها ميله يساوي 0 والثالث ميله سالب، والأخير ميله غير مُعرّف. بصورة عامة، كلما ازدادت القيمة المطلقة للميل ازداد تصاعده. فتصاعد المستقيم ذي الميل -5 في الشكل أدناه أكبر من تصاعد المستقيم ذي الميل $\frac{1}{5}$.

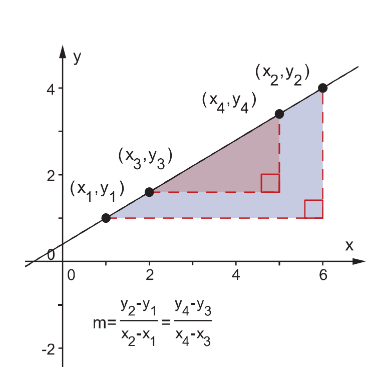




معادلة المستقيم

يُمكن استعمال أي نقطتين من نقاط مستقيم غير عمودي لإيجاد مَيله. يُمكن التحقُّق من هذا الأمر باستعمال تشابه المثلّثات كما هو مُبيّن في الشكل المقابل.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$$



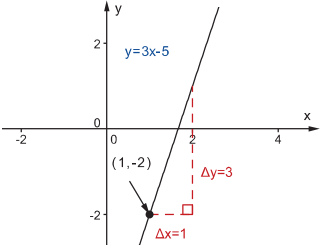
يُمكنك أن تكتب معادلة مستقيم إذا عرفت مَيله وإحداثيَّي نقطة يمر بها. افترض أن مَيل المستقيم هو m، أنه يمر في النقطة (x_1, y_1). إذا كانت (x, y) نقطة متحرِّكة على المستقيم، فإن $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$.

يُمكنك كتابة هذه المعادلة على صورة $y-y_1=m(x-x_1)$ ، تُسمّى هذه الصورة لمعادلة المستقيم **صورة الميل - النقطة**.

> **صورة الميل - النقطة لمعادلة المستقيم**
>
> تُكتب معادلة مستقيم ميله m والذي يمر في النقطة (x_1-y_1) على صورة
>
> $$y-y_1=m(x-x_1)$$

مثـــــال 1 إيجاد معادلة مستقيم

جِد معادلة مستقيم ميله 3 ويمر في النقطة $(1, -2)$.



الحـل

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-2)=3(x-1)$$
$$y+2=3(x-1)$$
$$y=3x-5$$

تذكَّر أن المستقيمات غير العمودية هي الوحيدة التي لها ميل. وبالتالي، لا يُمكن كتابة معادلة مستقيم عمودي على صورة الميل - النقطة. تُكتب معادلة مستقيم عمودي على صورة، $x=k$ حيث k عدد حقيقي. فمعادلة المستقيم العمودي الذي يمر في النقطة $(1, -2)$ ، مثلاً، هي $x=1$.

نقطة مراقبة

1. جِد معادلة مستقيم ميله 2– وَ يمر في النقطة $(1, 1)$.

النسب ومعدَّلات التغيُّر

يُمكن تفسير ميل المستقيم باعتباره نسبة أو باعتباره معدَّلاً. إذا كان x وَ y مقيسَيْن بوحدة القياس نفسها، فلا وحدة قياس للميل، وهو بالتالي **نسبة**. لكن إذا كان x وَ y مقيسَيْن بوحدتَي قياس مختلفتَيْن، فالميل هو معدّل تغيُّر. سوف تصادف، في هذا الصف، حالات يكون فيها الميل نسبة وأخرى يكون فيها معدَّل تغيُّر.

مثـــال 2 تفسيرات مختلفة للمَيل

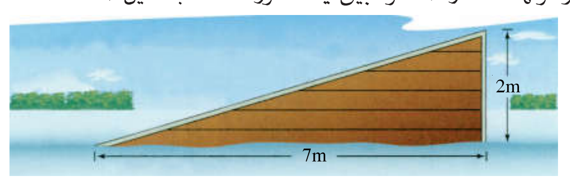
أ كان عدد سكان إحدى المدن 3687000 نسمة سنة 1990 وَ 4042000 نسمة سنة 2000.
كم كان المعدّل الوسطي لتغيّر عدد السكان؟

$$\text{معدّل التغيّر} = \frac{\text{التغيّر في عدد السكان}}{\text{التغيّر في عدد السنوات}}$$

$$= \frac{4042000 - 3687000}{2000 - 1990} = 35\,500$$

إذن المعدّل الوسطي لتغيُّر عدد السكان 35 500 نسمة في السنة. إذا استمر تزايد عدد سكان هذه المدينة بالمعدّل نفسه، يصبح عدد سكانها 4 397 000 نسمة سنة 2010.
لاحظ أن الميل هنا معدّل تغيّر.

ب في ميدان التزلُّج على الماء، وضع أحد النوادي منصة يمر عليها المتزلّج، ارتفاعها متران وطولها 7 أمتار كما هو مُبيّن في الصورة أدناه. جد ميل المنصَّة.



ميل المنصة هو نسبة ارتفاعها إلى طولها $m = \frac{2m}{7m} = \frac{2}{7}$.

لاحظ أن الميل هنا هو نسبة، وليس له وحدة قياس.

معدّل التغيُّر الذي وجدته في القسم أ من المثال 2 هو معدّل وسطي للتغيُّر. يُحسب المعدّل الوسطي للتغيّر دومًا على مدى فترة. في المثال 2 كانت هذه الفترة $[1990, 2000]$. سوف تتعلم في الفصل الثالث نوعًا آخر من معدّلات التغيُّر هو **المعدَّلات اللحظية للتغيُّر**.

ج قطعت سيارة المسافة بين أربيل وبغداد بسرعة ثابتة قدرها 100 كيلومتر في الساعة. تُشكّل الدالة $d(t)=100t$ نموذجًا لحساب المسافة (بالكيلومتر) التي قطعتها السيارة بعد ساعة من انطلاقها. ما ميل هذه الدالة الخطية؟ وما تفسيره؟ ميل الدالة الخطية $d(t)=100t$ هو 100 وهو يُمثل السرعة الثابتة للسيارة.


نقطة مراقبة

2. ينظر رجل إلى طائرة في السماء، تبعد عنه أفقيًا $600\ m$، بزاوية ارتفاع $60°$. ما ميل المستقيم الذي يربط بين عين الرجل والطائرة؟ هل هو نسبة أم معدَّل تغيُّر؟ ما ارتفاع الطائرة؟

تمثيل النماذج الخطّية بيانيًّا

يُمكن تصنيف أكثرية مسائل الهندسة التحليلية إلى نوعَيْن: يقضي الأول بإيجاد معادلة خط بياني مُعطى (منحنٍ أو لا)، ويقضي الثاني برسم بيان معادلة مُعطاة. يُمكنك استعمال صورة الميل - النقطة لمعادلة المستقيم في حل مسائل النوع الأول. غير أن هذه الصورة لا تناسب مسائل النوع الثاني. هناك صورة أخرى لمعادلة المستقيم تناسب حل مسائل النوع الثاني، هي **صورة الميل - التقاطع**.

صورة الميل - التقاطع لمعادلة المستقيم

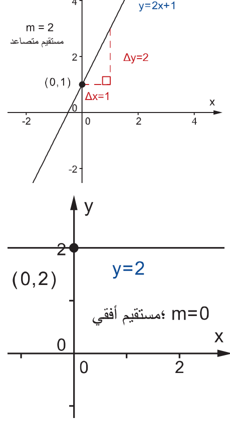
بيان الدالّة الخطّية $y = mx + b$
خط مستقيم ميله m وتقاطعه العمودي $(0, b)$.

مثـــال 3 رسم المستقيمات

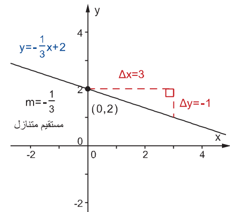
ارسم بيان كل معادلة.

أ $y=2x+1$ ب $y=2$ ج $3y+x-6=0$

الحل



أ التقاطع العمودي هو $(0, 1)$ لأن $b=1$. ميل المستقيم هو 2. هذا يعني أنك إذا تقدَّمت أفقيًّا وحدة واحدة من اليسار إلى اليمين انطلاقًا من النقطة $(0, 1)$ ، ينبغي لك الارتفاع وحدتَيْن؛ ما يعني أن النقطة $(1, 3)$ تقع على المستقيم. عيِّن النقطتَيْن $(0, 1)$ وَ $(1, 3)$ وارسم المستقيم المار بهما.



ب التقاطع العمودي هو $(0, 2)$ لأن $b=2$. مَيل المستقيم هو 0. هذا يعني أن المستقيم أفقي. فقط ارسم المستقيم الموازي للمحور x والمار في النقطة $(0, 2)$.

ج ابدأ بكتابة المعادلة على صورة الميل – التقاطع.

$$3y+x-6=0$$
$$3y=-x+6$$
$$y=-\frac{1}{3}x+2$$

التقاطع العمودي هو $(0, 2)$ لأن $b=2$. ميل المستقيم هو $-\frac{1}{3}$. هذا يعني أنك إذا تقدَّمت 3 وحدات من اليسار إلى اليمين انطلاقًا من النقطة $(0, 2)$ ، ينبغي لك النزول وحدة واحدة؛ ما يعني أن النقطة $(3, 1)$ تقع على المستقيم. عيِّن النقطتين $(0, 2)$ وَ $(3, 1)$ وارسم المستقيم المار بهما.

نقطة مراقبة

3. ارسم بيان كل معادلة

أ $y=3x-1$ ب $y=-2$ ج $y+3x-2=0$

بما أن ميل المستقيم العمودي غير مُعرّف، فلا يُمكن كتابة معادلته لا على صورة الميل – النقطة ولا على صورة الميل – التقاطع. هناك صورة عامة لمعادلة المستقيم تصلح لجميع الحالات. إنها صورة

$$Ax+By+C=0$$

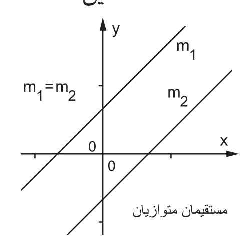
حيث لا يُمكن للعددين A وَ B أن يساوي كل منهما 0 في الوقت نفسه أي حيث $|A|+|B|\neq 0$.
إذا كانت $x=k$ معادلة مستقيم عمودي، تستطيع كتابتها على الصورة العامة $(1)x+(0)y+(-k)=0$.

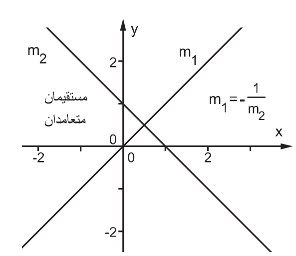
الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

1. الصورة العامّة $Ax+By+C=0$ حيث $|A|+|B|\neq 0$.
2. صورة معادلة المستقيم العمودي $x=k$
3. صورة معادلة المستقيم الأفقي $y=k$
4. صورة الميل – النقطة $y-y_1=m(x-x_1)$
5. صورة الميل – التقاطع $y=mx+b$

توازي المستقيمات وتعامدها

لميل المستقيم دور مهمّ في تحديد إن كان مستقيمان متوازيَيْن أو متعامدَيْن من دون الحاجة إلى رسمهما.
فإذا تساوى مَيلا مستقيمَيْن غير عموديَّيْن، توازى المستقيمان. وإذا ساوى ناتج ضرب مَيْلَيْهما العدد -1، كانا متعامدَيْن.





توازي المستقيمات وتعامدها

- يتوازى مستقيمان إذا تساوى ميلاهما.
- تتوازى المستقيمات الأفقية فيما بينها.
- تتوازى المستقيمات العمودية فيما بينها.
- يتعامد مستقيمان إذا كان ناتج ضرب ميليهما -1.
- يتعامد كل مستقيم عمودي مع كل مستقيم أفقي.

تــذكَّـرْ

المستقيم العمودي هو المستقيم الموازي للمحور y.
المستقيم الأفقي هو الموازي للمحور x.

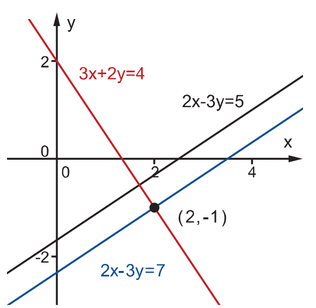
مثـــــال 4 إيجاد المستقيمات المتوازية والمتعامدة

أ اكتب، على الصورة العامّة، معادلة المستقيم المار في النقطة $(2, -1)$ والموازي للمستقيم $2x-3y=5$.

ب اكتب، على الصورة العامّة، معادلة المستقيم المار في النقطة $(2, -1)$ والمتعامد مع المستقيم $2x-3y=5$.

الحل

ابدأ بإيجاد ميل المستقيم $2x-3y=5$. لتجده، اكتب معادلته على صورة الميل – التقاطع $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ميل هذا المستقيم هو $\frac{2}{3}$.

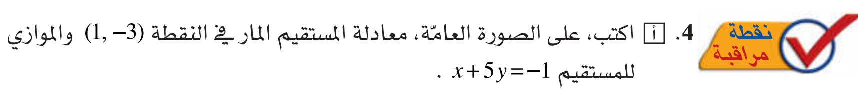


أ ميل المستقيم المار في النقطة $(2, -1)$ والموازي للمستقيم $2x-3y=5$ هو $\frac{2}{3}$. اكتب معادلة المستقيم المار في النقطة $(2, -1)$ وذي المَيل $\frac{2}{3}$.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-1)=\frac{2}{3}\left(x-(2)\right)$$
$$3(y+1)=2(x-2)$$
$$2x-3y-7=0$$

ب ميل المستقيم المار في النقطة $(2, -1)$ والمتعامد مع المستقيم $2x-3y=5$ هو $m=-\frac{3}{2}$. اكتب معادلة المستقيم المار في النقطة $(2, -1)$ وذي المَيل $-\frac{3}{2}$.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-1)=-\frac{3}{2}\left(x-(2)\right)$$
$$2(y+1)=-3(x-2)$$
$$3x+2y-4=0$$



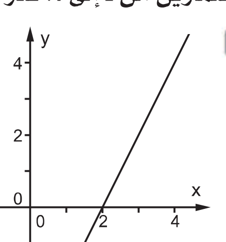
.4 أ اكتب، على الصورة العامّة، معادلة المستقيم المار في النقطة $(1, -3)$ والموازي للمستقيم $x+5y=-1$.

ب اكتب، على الصورة العامّة، معادلة المستقيم المار في النقطة $(2, -1)$ والمتعامد مع المستقيم $x+5y=-1$.

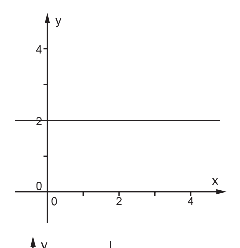
1-2 التمارين

في التمارين من 1 إلى 4، قدِّر ميل المستقيم.

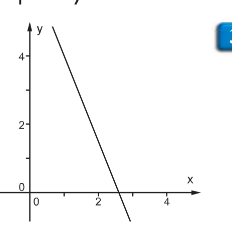
1



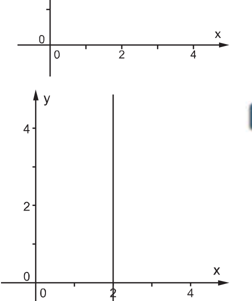
2



3



4



في التمارين من 5 إلى 10، ارسم المستقيم ذا الميل المُعطى، والمار في النقطة المعطاة.

5 $(2, 3)$ ؛ 1

6 $(-4, 1)$ ؛ -3

7 $(2, 3)$ ؛ -2

8 $(-4, 1)$ ؛ 0

9 $(2, 3)$ ؛ $-\frac{3}{2}$

10 $(-4, 1)$ ؛ غير معرَّف

في التمارين من 11 إلى 14، جِد مَيل المستقيم المار في النقطتيْن المحدَّدتَيْن.

11 $(5, 2)$ وَ $(3, -4)$

12 $(4, -2)$ وَ $(3, -2)$

13 $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right)$ وَ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

14 $(2, 5)$ وَ $(2, 1)$

في التمارين من 15 إلى 18، حدِّد 3 نقاط إضافية على المستقيم ذي الميل المعطى والمار في النقطة المعطاة.

15 $(2, 1)$ ؛ $m = 0$

16 $(1, 7)$ ؛ $m = -3$

17 $(-3, 4)$ ؛ m غير معرَّف

18 $(-2, -2)$ ؛ $m = 2$

في التمارين من 19 إلى 22، جِد ميل المستقيم وتقاطعه العمودي.

19 $x + 5y = 20$

20 $6x - 5y = 15$

21 $x = 4$

22 $y = -1$

في التمارين من 23 إلى 28، اكتب معادلة للمستقيم ذي الميل المُعطى والمار في النقطة المُعطاة، ثم ارسمه.

23 $(0, 3)$ ؛ $m = \frac{3}{4}$

24 $(3, -2)$ ؛ $m = 3$

25 $(0, 4)$ ؛ $m = 0$

26 $(-2, 4)$ ؛ $m = -\frac{3}{5}$

27 $(0, 0)$ ؛ $m = \frac{2}{3}$

28 $(-1, 2)$ ؛ m غير مُعرف

في التمارين من 29 إلى 34، اكتب معادلة للمستقيم المار في النقطتيْن المحدَّدتَيْن.

29 $(2, 1)$ وَ $(0, 3)$ **30** $(-3, -4)$ وَ $(1, 4)$ **31** $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ وَ $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

32 $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right)$ وَ $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ **33** $(5, 1)$ وَ $(5, 8)$ **34** $(1, -2)$ وَ $(3, -2)$

35 جِد معادلة المستقيم العمودي الذي له تقاطع أفقي عند 3.

36 جِد معادلة المستقيم الأفقي الذي له تقاطع عمودي عند 3.

37 استعمل معادلة المستقيم المار بنقطتين لتُبيّن أن معادلة المستقيم ذي التقاطع الأفقي $(a, 0)$ والتقاطع العمودي $(0, b)$ هي $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

في التمرينيْن 38 وَ 39، استعمل نتيجة التمرين السابق لتكتب معادلة للمستقيم ذي التقاطعَيْن المحدَّدَيْن.

38 $(2, 0)$ وَ $(0, 3)$ **39** $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ وَ $(0, -2)$

في التمارين من 40 إلى 43، اكتب معادلة للمستقيم المار في النقطة المُعطاة والموازي للمستقيم المُعطى.

40 $(2, 1)$ ؛ $4x-2y=3$ **41** $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$ ؛ $5x-3y=0$

42 $(-6, 4)$ ؛ $3x+4y=7$ **43** $(-1, 0)$ ؛ $y=-3$

في التمارين من 44 إلى 47، اكتب معادلة للمستقيم المار في النقطة المُعطاة والمتعامد مع المستقيم المُعطى.

44 $(2, 1)$ ؛ $4x-2y=3$ **45** $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$ ؛ $5x-3y=0$

46 $(-6, 4)$ ؛ $3x+4y=7$ **47** $(-1, 0)$ ؛ $y=-3$

48 هل النقاط $(-2, 1)$ وَ $(-1, 0)$ وَ $(2, -2)$ على استقامة واحدة؟

حول المفاهيم

في التمارين من 49 إلى 51، جِد إحداثّيي نقطة التقاطع المحدَّدة. وضّح كيف قمت بالحل.

P (b,c)
M (-a,0)
N (a,0)

49 نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث.

50 نقطة تقاطع وسيطات المثلث.

51 نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث.

52 **تحويل درجات الحرارة** يغلي الماء عند درجة حرارة 100° على المقياس المئوي (212° على مقياس فهرنهايت)، ويتجمَّد عند درجة حرارة 0° على المقياس المئوي (32° على مقياس فهرنهايت). اكتب معادلة خطّية للتحويل من المقياس المئوي إلى مقياس فهرنهايت، وأخرى للتحويل في الاتجاه المعاكس. حوِّل 72F على مقياس فهرنهايت إلى درجة حرارة على المقياس المئوي.

53 تدفع إحدى الشركات يوميًّا لسائق شاحنة مبلغ 000 15 دينار للطعام والاستراحة و 350 دينارًا عن كل كيلومتر يقطعه. اكتب دالّة تشكّل نموذجًا لحساب ما تدفعه الشركة للسائق بدلالة عدد الكيلومترات التي يقطعها. إذا ما قطع السائق $137\,km$، كم ستدفع له الشركة؟

54 **الاستهلاك الخطي** عندما تشتري سيارة، ينخفض ثمنها سنة بعد سنة. تُعبِّر عن ذلك بالقول أن السيارة تُستهلك سنة بعد أخرى. يعتمد بعض خبراء الإدارة قاعدة لحساب الاستهلاك. تقوم هذه القاعدة على أن قيمة الاستهلاك ثابتة من سنة إلى أخرى. اشترت إحدى الشركات آلة ثمنها 000 875 دينار. لا تعود هذه الآلة صالحة للاستعمال ولا يعود لها ثمن بعد 5 سنوات.

أ اكتب دالّة خطّية تشكّل نموذجًا لحساب قيمة الآلة بدلالة الزمن t $(0 \le t \le 5)$.

ب ما قيمة هذه الآلة عندما $t = 2$.

ج بعد كم من الزمن يُصبح ثمن الآلة 000 175 دينار؟

يقاسُ بُعد النقطة (x_1, y_1) عن المستقيم $Ax + By + C = 0$. بالقانون $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
جِد، في التمارين من 55 إلى 58، بُعد النقطة عن المستقيم.

55 $(0, 0)$ ؛ $4x + 3y = 10$

56 $(-2, 1)$ ؛ $x - y - 2 = 0$

57 $(6, 2)$ ؛ $x = -1$

58 $(2, 3)$ ؛ $4x + 3y = 10$

59 اكتب بدلالة m، المسافة d بين النقطة $(3, 1)$ والمستقيم $y = mx + 4$. مثِّل بيانيًّا d بدلالة m. متى تساوي هذه المسافة 0؟ أوضح النتيجة هندسيًّا.

60 أثبت أن الشكل الهندسي الناتج من ربط المنتصفات المتتالية لأضلاع رباعي، هو متوازي أضلاع.

صواب أم خطأ؟ في التمارين من 58 إلى 61، اذكر إن كانت المقولة صوابًا فعلّله أو خطأ فأثبته.

61 المستقيمان $ax + by = c_1$ وَ $bx - ay = c_2$ ، حيث $a \ne 0$ وَ $b \ne 0$ ، متعامدان.

62 يُمكن لمستقيمين، لكل منهما ميل موجب، أن يكونا متعامدين.

الفصل 1



1-1 بيانات الدوال

1 ارسم، بالنقاط، بيان كل دالّة.

أ $f(x)=2x^2-4x$ ب $f(x)=2\sqrt{x+1}-1$

2 جِد تقاطعات بيان كل دالّة مع محورَي الإحداثيات، ثم ادرس تناظرها بالنسبة إلى المحور y وبالنسبة إلى نقطة الأصل.

أ $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$ ب $f(x)=(3x-1)^2+6x$

3 $f(x)=x^3+3x$ وَ $g(x)=x^2+3$.

أ بيّن أن الدالّة f فردية وأن الدالّة g زوجية.

ب جِد نقاط تقاطع بيانَي الدالّتيْن.

2-1 معادلة المستقيم

4 جِد معادلة المستقيم ذي الميل -2 والذي يمر في النقطة $(2, -1)$.

5 جِد معادلة المستقيم الذي يمر في النقطتين $(0, 1)$ وَ $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$.

6 جِد نقطة تقاطع مستقيمَي التمرينيْن 4 وَ 5.

7 جِد معادلة المستقيم الذي يمر في النقطتيْن $(2, 0)$ وَ $(0, b)$ حيث $b\neq 0$. ما قيمة b التي تجعل هذا المستقيم متعامدًا مع المستقيم $x-2y+1=0$ ؟

8 جِد قيمة m التي تجعل النقاط $(2, 0)$ وَ $(0, -3)$ وَ $(m, 1)$ على استقامة واحدة؟

3-1 الدوال وبياناتها
Functions and Their Graphs

الأهداف

- يستعمل الكتابة الدالّية ليمثّل دالّة ويحسب قيمها.
- يُحدّد مجال دالّة ومداها.
- يرسم بيان دالّة.
- يميّز الأنواع المختلفة لتحويلات الدوال.
- يُصنّف الدوال ويُميّز تركيبها.

الدوال والكتابة الدالّية

يمكنك التعبير عن **علاقة** من مجموعة A إلى مجموعة B بوساطة مجموعة من الأزواج المرتَّبة (x, y) حيث $x \in A$ وَ $y \in B$. تُعبِّر عن ذلك بالقول إن العلاقة **تقرن** y بـ x.

الدالّة هي علاقة من مجموعة A إلى مجموعة B، تتمتَّع بخاصية أساسية تقضي بأن يتساوى عنصران y وَ z من B إذا قرنَتْهما الدالّة بالعنصر نفسه x في A. بتعبير آخر، إذا كان (x, y) وَ (x, z) زوجَيْن من مجموعة الأزواج المرتَّبة التي تُشكِّل الدالّة، فإن $y = z$ حكمًا. يُسمّى x في هذه العلاقة **المتغيّر الحر** ويسمّى y **المتغيّر التابع**.

يُمكن تمثيل الكثير من حالات الواقع بدوال. فمساحة الدائرة A هي دالّة بدلالة نصف القطر r وفقًا للعلاقة $A = \pi r^2$. في هذه العلاقة، r هو المتغيِّر الحر وَ A هو المتغيّر التابع.

تعريف الدالّة الحقيقية في متغيّر حقيقي

إذا كانت A وَ B مجموعتيْن من الأعداد الحقيقية، فإن كل دالة f من A إلى B هي دالّة **حقيقية بمتغيّر حقيقي**.

مجال الدالة f هو المجموعة A. إذا قرنت الدالّة f العنصر y في B بالعنصر x في A، فإن y هو قيمة f عند x. عندها، نكتب $y = f(x)$ ونقول أن y هو صورة x بالدالة f. مدى الدالة f هو مجموعة عناصر B التي تقرنها الدالة بكل عناصر المجال A.

تعلَّمت في الصف الحادي عشر أن من الممكن تعريف الدالّة بطرائق مختلفة. لكننا سنهتم بشكل أساسي بالدوال المُعرَّفة جبريًّا بوساطة معادلة. فالمعادلة $x^2 + 2y = 1$ ، مثلاً، يمكن أن تُعرِّف المتغيِّر التابع y كدالّة بدلالة المتغيِّر الحر x. لكي نكتب ذلك، نحل المعادلة السابقة بالنسبة إلى y ونكتب قيمته كمقدار لا يتضمّن إلا متغيّرًا واحدًا هو x:

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)$$

بما أن $y = f(x)$ فإن بمقدورنا أن نكتب

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)$$

تُسمّى كتابة الدالّة على الصورة السابقة **الكتابة الدالّية** للدالّة. للكتابة الدالّية فائدة كبرى، فهي تحدِّد بشكل واضح المتغيِّر الحر x والمتغيِّر التابع $f(x)$ واسم الدالّة f. كما أنها تسهِّل حساب قيمة الدالّة عندما يتَّخذ المتغيِّر الحر قيمة معيَّنة. فمثلاً، لكي تحسب قيمة الدالّة $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ ، عندما $x = -2$ ، عوِّض عن x بقيمته، واحسب قيمة المقدار العددي الناتج من التعويض.

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 2(4) + 8 + 1 = 17$$

تذكَّر أنَّك عندما تعوِّض عن x بقيمة معيَّنة a في دالَّة $f(x)$، فإن القيمة $f(a)$ التي تحصل عليها، هي صورة a بالدالّة f.

المفردات Vocabulary

Relation	علاقة
Associate	تقرن
Real function in one real variable	دالة حقيقية في متغيّر حقيقي واحد
Domain	مجال
Range	مدى
Functtion notation	كتابة دالّية
One-to-One function	دالّة تباينية
Onto function	دالّة شاملة
Polynomial function	دالّة حدودية
Degree	درجة
Coefficient	معامل
Leading Coefficient	معامل رئيس
Constant term	حد ثابت

مثـــال 1 إيجاد قيمة دالّة

جِد قيمة كل مقدار مستعملاً الدالّة $f(x)=x^2+7$.

أ $f(3a)$ ب $f(b-1)$ ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ حيث $\Delta x\neq 0$

الحـل

أ $f(3a)=(3a)^2+7=9a^2+7$

ب $f(b-1)=(b-1)^2+7=b^2-2b+1+7=b^2-2b+8$

ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2+7-(x^2+7)}{\Delta x}$

$=\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+7-x^2-7}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$

ملاحظة: يُسمّى المقدار $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ **ناتج قسمة الفرقَيْن**، وله دور مهمّ في حساب التفاضل، كما سترى لاحقًا. لأن المقام يجب أن يكون مختلفا عن 0.



1. جِد قيمة كل مقدار مستعملاً الدالّة $f(x)=\frac{1}{x}$.

أ $f(3a)$ ب $f\left(\sqrt{3}\right)$ ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ حيث $\Delta x\neq 0$

مجال الدالّة ومداها

المجال

يتحدَّد مجال الدالّة بطريقة معلنة أو بطريقة ضمنية، باستعمال المعادلة التي تُعرّف الدالّة. مثلاً:

- مجال الدالّة $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ حيث $4\leq x\leq 5$ معرّف بشكل معلن. وهو $\{x/4\leq x\leq 5\}$.
- مجال الدالّة $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ معرَّف بشكل ضمنيّ، وهو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل x^2-9 لا تساوي 0، أي $x\neq\pm 3$. هذا المجال هو $\{x/x\neq\pm 3\}$.
- مجال الدالة $f(x)=\sqrt{x-3}$ هو $\{x|x\geq 3\}$ لأن المجذور $x-3$ يجب ألا يكون سالبا.
- مجال الدالة $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ هو $\{x|-2\leq x\leq 2\}$ لأن المجذور $4-x^2$ يجب ألا يكون سالبا.
- مجال الدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$ هو $\{x|x<3\}$ لأن المجذور $3-x$ يجب ألا يكون سالبا وألا يساوي 0.

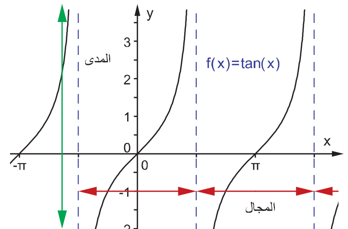
المدى

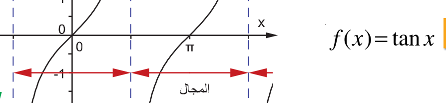
المدى لأي دالّة f ، هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تغطّيها قيم الدالّة، أي مجموعة القيم $f(a)$ حيث a ينتمي إلى مجال الدالّة f .

يمكنك تحديد مدى دالّة f ، بالنظر إلى بيانها على شاشة حاسبة بيانية، أو بالنظر إلى المعادلة التي تعرّفها. مثلاً:

- مدى الدالّة $f(x)=\frac{1}{x}$ هو $\{y/y\neq 0\}$ لأن $\frac{1}{x}$ لا يمكن أن تساوي 0، ويمكن أن تساوي أي قيمة مختلفة عن 0.

• مدى الدالّة $f(x)=\sin x$ هو $\{y/-1\le y\le 1\}$ لأن $\sin x$ لا يمكن أن تتخذ قيمًا خارج الفترة $[-1, 1]$.





مثـــال 2 إيجاد مجال الدالّة ومداها

جِد مجال كل دالّة ومداها.

أ $f(x)=\sqrt{x-1}$ ب $f(x)=\tan x$

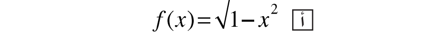
الحل

أ مجال الدالّة هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقّق $x-1\ge 0$، إنها الفترة $[1, +\infty[$
مدى الدالّة هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة أي $[0, +\infty[$ لأن $\sqrt{x-1}$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ب مجال الدالّة هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقّق $x\ne\frac{\pi}{2}+n\pi$ حيث $n\in z$.
أما مداها فهو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.



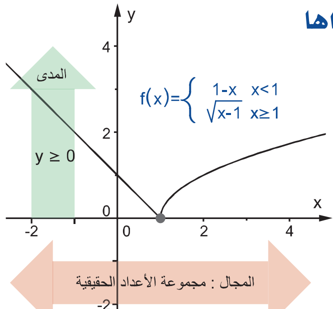
نقطة مراقبة 2. جِد مجال كل دالّة ومداها.



أ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ب $f(x)=\frac{1}{\tan x}$

مثـــال 3 إيجاد مجال الدالّة متفرِّعة القاعدة ومداها

جِد مجال الدالّة $f(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ \sqrt{x-1} & x\ge 1\end{cases}$ ، ومداها.



الحل

بما أن الدالّة مُعرّفة عندما $x<1$ وَ $x\ge 1$ فإن مجالها هو $\mathbb{R}$. أما مداها فهو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة لأن $f(x)$ تساوي $1-x$ (موجب) عندما $x<1$ وَ $\sqrt{x-1}$ (غير سالب) عندما $x\ge 1$.



نقطة مراقبة 3. جِد مجال الدالّة $f(x)=\begin{cases}3-x & x<3\\ \sqrt{x-3} & x\ge 3\end{cases}$ ، ومداها.

مثـــال 4 إيجاد مجال دالّة تستعمل المُطلق ومداها

جِد مجال الدالّة $f(x)=|1-x|+|x|$ ومداها.

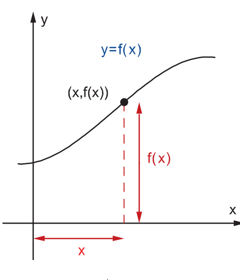
الحل

مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقة لأنها معرفة أيا كانت قيمة x. مدى الدالة هو $\{y|y\ge 1\}$ لأن القيمة المطلقة لا تكون سالبة. لاحظ أن 0 لا ينتمي إلى مدى الدالة لأن قيمة الدالة هي مجموع مطلقين لا يُساويان 0 في الوقت نفسه.

نقطة مراقبة **4. جِد مجال الدالّة $f(x)=|x+1|+|x-1|$ ومداها.**

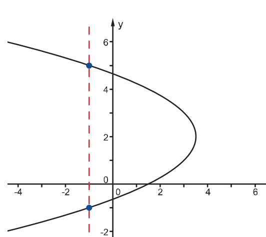
تقول عن دالّة f أنها **تباينية** إذا كان كل عنصر y في مداها مقرونًا بعنصر وحيد x في مجالها؛ أو بتعبير آخر، يتساوى عنصران x_1 وَ x_2 من عناصر المجال إذا تساوت القيمتان $f(x_2)$ وَ $f(x_1)$.
الدالّة الأولى في المثال 2 دالّة تباينية في حين أن دالّة المثال 1 غير تباينية.
وتقول على دالّة f من مجموعة A إلى مجموعة B أنها **شاملة** إذا كان مداها يُغطّي B بالكامل.
الدالّة الثانية في المثال 2 هي دالّة شاملة.

بيان الدالّة

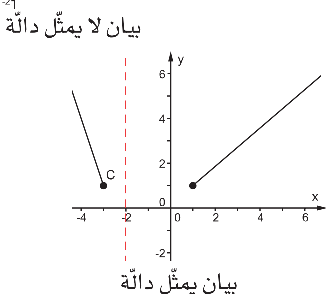


يتألّف بيان الدالّة من جميع النقاط $(x, f(x))$ عندما يتّخذ x جميع القيم في مجال الدالّة. انظر الشكل المقابل، ولاحظ ما يلي:
- x هي المسافة الجبرية (موجبة أو سالبة) بين النقطة والمحور y.
- $f(x)$ هي المسافة الجبرية بين النقطة والمحور x.

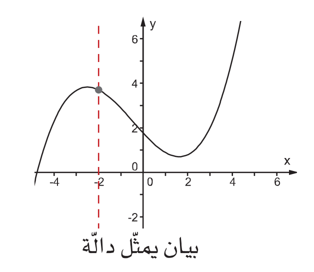
إذا رسمت مستقيمًا عموديًا فإنه يقطع بيان الدالّة مرة واحدة على الأكثر. توفّر هذه الملاحظة اختبارًا بصريًا لتقرير إن كان رسم بياني يعود إلى دالّة أم لا. يُسمّى هذا الاختبار **اختبار المستقيم العمودي**. إذا قطع مستقيم عمودي الرسم البياني في أكثر من نقطة، فإن هذا الرسم لا يُمثّل دالّة. الرسم البياني المقابل لا يعود إلى دالّة لأن المستقيم العمودي $x=-1$ يقطعه في نقطتيْن مختلفتيْن بينما يعود كل من الرسميْن الآخريْن إلى دالّة.



بيان لا يمثّل دالّة

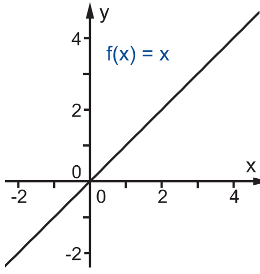


بيان يمثّل دالّة



بيان يمثّل دالّة

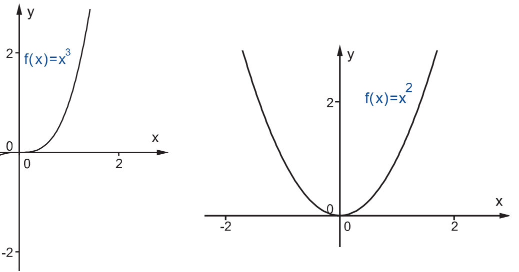
تُظهرُ الأشكال أدناه بيانات 11 من الدوالّ الأساسية. كن قادرًا على تمييزها ومعرفة الدالّة التي يُمثّلها كل منها مُستقبلاً.



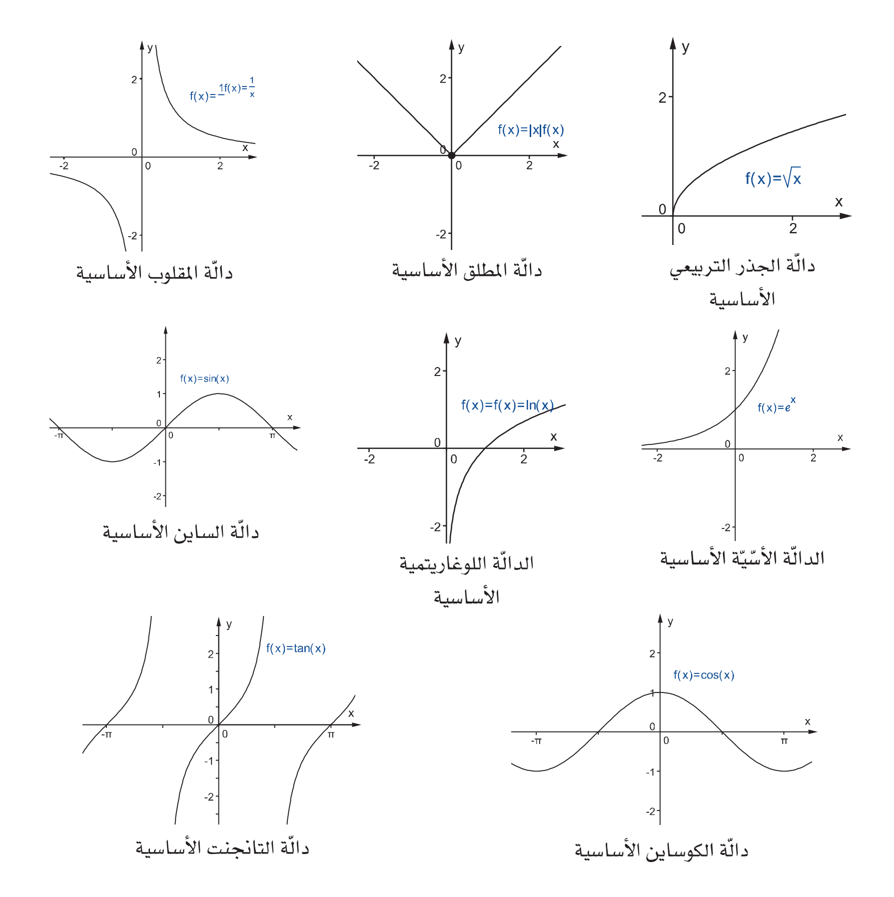
الدالّة الخطّية الأساسية



الدالّة التكعيبية الأساسية

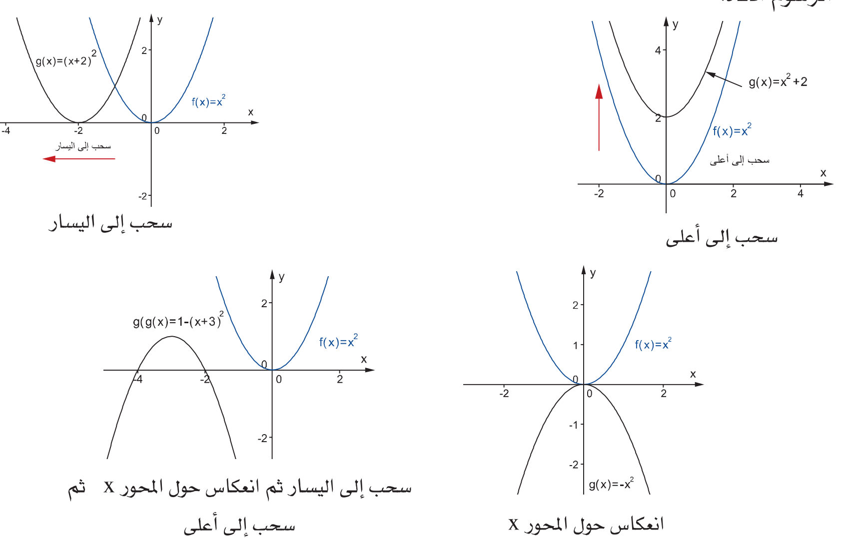


الدالّة التربيعية الأمّ (الأساسية)



تحويلات الدوالّ

يُمكن تصنيف الدوال في مجموعات أو عائلات. تتميّز بيانات دوال كل عائلة بأن لها الهيئة العامّة نفسها. فإذا أخذت عائلة الدوال التربيعية، تجد أن لبياناتها هيئة أساسية واحدة، كما تُبيّن ذلك الرسوم أدناه.



كل بيان من البيانات السابقة هو تحويل لبيان الدالّة الأساس. تُظهر الأشكال الأربعة السابقة ثلاثة من التحويلات الأساسية: السحب إلى أعلى والسحب إلى اليسار والانعكاس حول المحور x . يُمكنك أن تحدِّد التحويلات التي تقود من بيان الدالّة الأساسية إلى بيان دالّة من فروعها من دون أن ترسم البيانَيْن.

فإذا كانت الدالّة الأساس هي الدالة $f(x)=x^2$ فإن بيانات الدوال الأربع هي:

$y=f(x)+2$	سحب إلى أعلى مداه وحدتان
$y=f(x+2)$	سحب إلى اليسار مداه وحدتان
$y=-f(x)$	انعكاس حول المحور x
$y=-f(x+3)+1$	سحب إلى اليسار ثم انعكاس حول المحور x ثم سحب إلى أعلى وحدة واحدة.

التحويلات الأساسية $(c>0)$

البيان الأصلي	$y=f(x)$
سحب أفقي إلى اليمين مداه c وحدة	$y=f(x-c)$
سحب أفقي إلى اليسار مداه c وحدة	$y=f(x+c)$
سحب عمودي إلى أعلى مداه c وحدة	$y=f(x)+c$
سحب عمودي إلى أسفل مداه c وحدة	$y=f(x)-c$
انعكاس حول المحور x	$y=-f(x)$
انعكاس حول المحور y	$y=f(-x)$
انعكاس حول نقطة الأصل	$y=-f(-x)$

تصنيف الدوال

يرجع الفضل في المفهوم الحديث للدالّة إلى جهود علماء الرياضيات في القرنَيْن السابع عشر والثامن عشر. ويعود الفضل في الكتابة الدالّية $y=f(x)$ إلى العالم ليونارد أولر Leonhard Euler. في نهاية القرن الثامن عشر توصَّل العلماء إلى التالي: يمكن إيجاد نماذج رياضية لدراسة الكثير من مسائل الحياة باستعمال مجموعة من الدوال سمّوها **الدوال البسيطة**.

تُصنّف الدوال البسيطة في ثلاث فئات سبق أن درستها في الصفَّيْن العاشر والحادي عشر:

- **الدوال الجبرية** (الحدودية، النسبية، الجذرية).
- **الدوال المثلّثية** (دوال الساين sin والكوساين cos والتانجنت tan).
- **الدوال الأسّية واللوغاريتمية.**

من الدوال الأكثر شيوعًا **الدوال الحدودية**. الصورة العامّة لدالّة حدودية هي:

$$a_n \neq 0 \;\; ؛ \;\; f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$



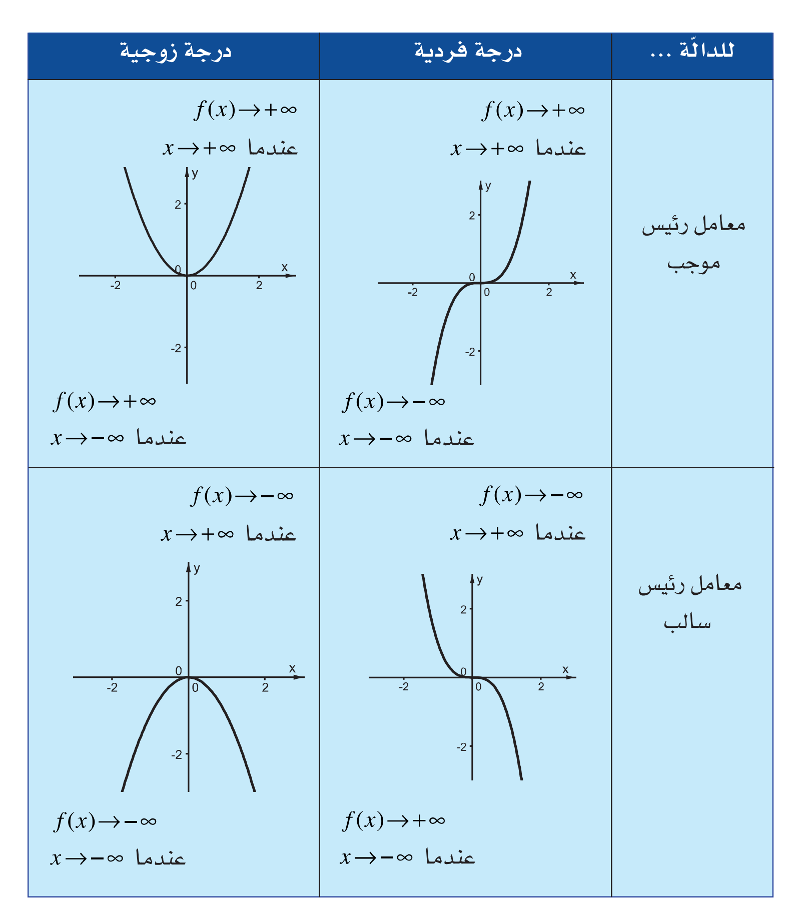
ليونارد أولر 1707 – 1783

بالإضافة إلى مساهماته في جميع فروع الرياضيات تقريبًا، كان أولر من أوائل من طبّقوا حساب التفاضل والتكامل على مسائل الحياة في الفيزياء. فقد تناول في مؤلّفاته الكثيرة موضوعات مثل بناء السفن وعلم الأصوات وعلم الأضواء والفلك والميكانيكا والحقول المغناطيسية.

حيث العدد الصحيح الموجب n هو درجة الدالّة والأعداد الحقيقية $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ **معاملاتها**، والمعامل a_n **المعامل الرئيس**، والمعامل a_0 **الحد الثابت** أو **المعامل الثابت**. من الشائع استعمال حروف مؤشَّرة a_i لكتابة معاملات الدالّة الحدودية. غير أن معاملات الدوال الحدودية من الدرجات الدنيا تُكتب باستعمال أحرف مختلفة كما يظهر في الجدول التالي.

الدرجة	الصورة	الاسم
دالّة حدودية من الدرجة 0	$f(x)=a$	دالّة ثابتة
دالّة حدودية من الدرجة الأولى	$f(x)=ax+b$	دالّة خطّية
دالّة حدودية من الدرجة الثانية	$f(x)=ax^2+bx+c$	دالّة تربيعية
دالّة حدودية من الدرجة الثالثة	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	دالّة تكعيبية

يُمكن أن يُظهر بيان الدالّة الحدودية غير الثابتة عدة نقاط تحوّل. فهو يتصاعد أو يتنازل من دون حدود عندما يتحرَّك x نحو $+\infty$ أو $-\infty$. يُمكن تحديد سلوك بيان الدالّة الحدودية عندما يتحرَّك x نحو $+\infty$ أو $-\infty$، بالاستناد إلى كون درجة الدالة زوجية أو فردية، وإلى إشارة المعامل الرئيس. يُلخّص الجدول أدناه هذا السلوك.



للدالّة ...	درجة فردية	درجة زوجية
معامل رئيس موجب	$f(x)\to+\infty$ عندما $x\to+\infty$ $f(x)\to-\infty$ عندما $x\to-\infty$	$f(x)\to+\infty$ عندما $x\to+\infty$ $f(x)\to+\infty$ عندما $x\to-\infty$
معامل رئيس سالب	$f(x)\to-\infty$ عندما $x\to+\infty$ $f(x)\to+\infty$ عندما $x\to-\infty$	$f(x)\to-\infty$ عندما $x\to+\infty$ $f(x)\to-\infty$ عندما $x\to-\infty$

تركيب الدوال

تعلَّمت في الصف الحادي عشر أن من الممكن تعريف دوالّ جديدة باستعمال دالّتيّن f وَ g.

فإذا كانت $f(x)=2x-3$ وَ $g(x)=x^2+1$ فإن بوسعك أن تعرّف الدوال التالية:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x-3)+(x^2+1)=x^2+2x-2$$

$$(g-f)(x)=g(x)-f(x)=x^2+1(2x-3)=x^2-2x+4$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x-3)-(x^2+1)=-x^2+2x-4$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=(2x-3)(x^2+1)=2x^3-3x^2+2x-3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x-3}{x^2+1} \qquad \left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+1}{2x-3}\ ;\ x\neq\frac{3}{2}$$

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=2\big(g(x)\big)-3=2(x^2+1)-3=2x^2-1$$

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\big(f(x)\big)^2+1=(2x-3)^2+1=4x^2-12x+10$$

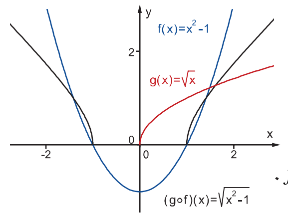
لاحظ أن $f\circ g\neq g\circ f$.

مثـــال 5 إيجاد مجال دالّة مركّبة

أ **جِد مجال الدالّة $g\circ f$ حيث $f(x)=x^2-1$ وَ $g(x)=\sqrt{x}$.**

ب **جِد مجال الدالّة $f\circ g\circ h$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ وَ $g(x)=3x$ وَ $h(x)=x-2$.**

الحل



أ $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1}$

مجال الدالّة $g\circ f$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تُحقّق $x^2-1\geq 0$.

لحل المتباينة $x^2-1\geq 0$، ارسم بيان الدالّة $f(x)=x^2-1$. مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تُحقّق $x^2-1\geq 0$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تُحقّق $x\leq -1$ أو $x\geq 1$.

إذن مجال الدالّة $g\circ f$ هو $\{x\leq -1$ أو $x\geq 1\}$.

ب $(f\circ g\circ h)(x)=f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)=f\Big(g\big(x-2\big)\Big)=f\big(3(x-2)\big)=\sqrt{3(x-2)}$

مجال الدالّة $f\circ g\circ h$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل $3(x-2)\geq 0$ أي $\{x|x\geq 2\}$.



نقطة مراقبة **4. جِد مجال الدالّة $g\circ f$ حيث $f(x)=x^2-1$ وَ $g(x)=\frac{1}{x}$**

3-1 التمـاريــن

في التمرينين 1 و 2، استعمل بيانَي f وَ g للإجابة عن الأسئلة التالية:

أ حدِّد مجال كل دالّة ومداها.

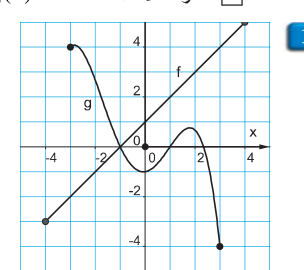
ب جِد $f(-2)$ وَ $g(3)$.

ج جِد قيم x التي تُحقّق $f(x)=g(x)$.

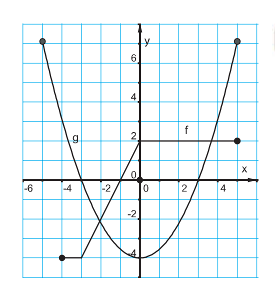
د قدّر حلاً للمعادلة $f(x)=2$.

هـ قدِّر حلاً للمعادلة $g(x)=0$.

1



2

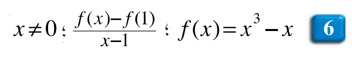


في التمارين من 3 إلى 8، احسب القيم المطلوبة للدالّة إن كان ذلك ممكنًا. بسِّط النتائج.

3 $f(x)=\sqrt{x+3}$ ؛ $f(-2)$ ، $f(6)$ ، $f(-5)$ ، $f(x+\Delta x)$

4 $f(x)=3-x^2$ ؛ $f(0)$ ، $f\left(\sqrt{3}\right)$ ، $f(-2)$ ، $f(t-1)$

5 $f(x)=\cos 2x$ ؛ $f(0)$ ، $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ، $f(-2)$ ، $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

6  $f(x)=x^3-x$ ؛ $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ؛ $x\neq 0$

7 $f(x)=x^3$ ؛ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ؛ $\Delta x\neq 0$

8 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ؛ $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ ؛ $x\neq 2$

في التمارين من 9 إلى 11، جِد مجال كل دالّة ومداها.

9 $f(x)=-\sqrt{x+3}$

10 $f(t)=\ln(1-t)$

11 $f(x)=\frac{2}{x-1}$

في التمارين من 12 إلى 14، جِد مجال كل دالّة.

12 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

13 $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

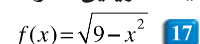
14 $f(x)=\frac{1}{|x+3|}$

في التمرينين 15 و 16، جِد القيم المطلوبة للدالّة.

15 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<0\\ 2x+2 & x\geq 0\end{cases}$ ؛ $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f(t^2+1)$

16 $f(x)=\begin{cases}|x|+1 & x<1\\ -x+1 & x\geq 1\end{cases}$ ؛ $f(0)$ ، $f(-3)$ ، $f(1)$ ، $f(3)$ ، $f(b^2+1)$

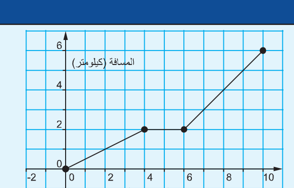
في التمرينيْن 17 و 18، جِد بيانيًا مجال كل دالّة ومداها.

17  $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

18 $f(x)=2\sin\pi x$

حول المفاهيم

19 يُظهر البيان المقابل تطور المسافة التي قطعها طالب في سيارته (بدلالة الوقت) منذ انطلاقه من منزله نحو الجامعة



أ كم كانت سرعته بين $t=0$ وَ $t=4$ ؟

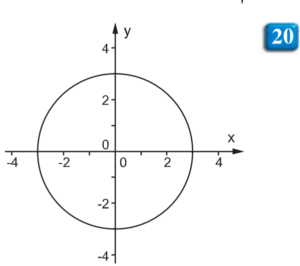
ب كم كانت سرعته بين $t=4$ وَ $t=6$ ؟

ج كم كانت سرعته بين $t=6$ وَ $t=10$ ؟

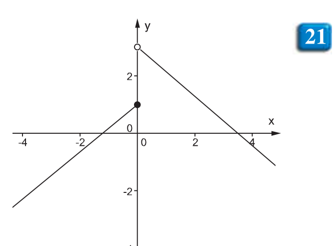
د صف قيادة الطالب لسيارته.

في التمرينَيْن 20 وَ 21، استعمل اختبار المستقيم العمودي لتقرِّر إن كان الرسم البياني يعود إلى دالّة أم لا.

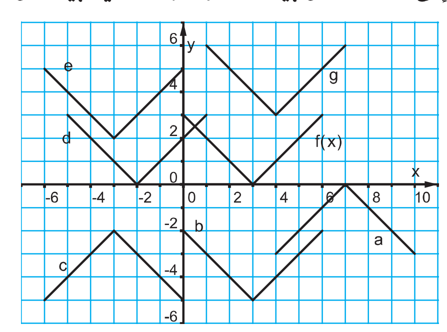
20



21



في التمارين من 22 إلى 27، استعمل بيان $y=f(x)$ لتحديد بيان كل دالّة.



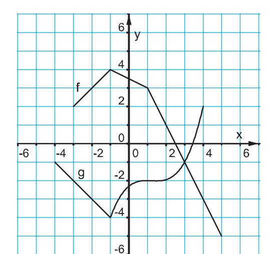
22 $y=f(x+5)$ **23** $y=f(x)-5$ **24** $y=-f(-x)-2$

25 $y=-f(x-4)$ **26** $y=f(x+6)+2$ **27** $y=f(x-1)+3$

28 جد $(f\circ g)(x)$ وَ $(g\circ f)(x)$ حيث $f(x)=x^2$ وَ $g(x)=\sqrt{x}$. هل $f\circ g=g\circ f$ ؟

29 جد $(f\circ g)(x)$ وَ $(g\circ f)(x)$ حيث $f(x)=\frac{1}{x}$ وَ $g(x)=\sqrt{x+2}$. هل $f\circ g=g\circ f$ ؟

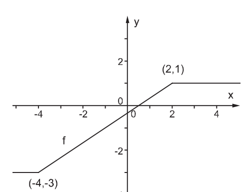
30 استعمل الرسم البياني المقابل لتجد القيم المطلوبة.



أ $(f\circ g)(3)$ ب $g\big(f(2)\big)$ ج $g\big(f(5)\big)$

د $(f\circ g)(-3)$ هـ $(g\circ f)(-1)$ و $f\big(g(-1)\big)$

31 استعمل بيان الدالّة f المقابل لرسم بيان كل من الدوالّ التالية:



أ $f(x-4)$ ب $f(x+2)$ ج $f(x)+4$

د $f(x)-1$ هـ $2f(x)$ و $\frac{1}{2}f(x)$

32 استعمل بيان الدالّة $f(x)=\sqrt{x}$ لرسم بيان كل من الدوال التالية:

أ $g(x)=\sqrt{x}+2$ ب $h(x)=-\sqrt{x}$ ج $p(x)=\sqrt{x-2}$

33 **دوائر** رمت شيرين حجرًا في بركة ماء هادئة فأحدثت متتالية من الدوائر المشتركة في المركز، راح نصف قطر أوسعها يتزايد وفقًا للنموذج $r=0.6t$، حيث يرمز t إلى الزمن الذي مضى على رمي الحجر بالثواني ويرمز r إلى نصف قطر الدائرة بالأقدام. تُحسب مساحة الدائرة وفقًا للقانون $A=\pi r^2$. جِد الدالّة $(A\circ r)(t)$. ما مساحة الدائرة الأوسع بعد 6 ثوانٍ من رمي الحجر؟

34 جِد ثلاث دوال f، g، h بحيث يكون لديك $k=f\circ g\circ h$ وَ $k(x)=\sqrt{2x-2}$.

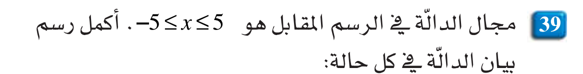
في التمارين من 35 إلى 38، حدّد إن كانت الدالّة فردية أم زوجية.

35 $f(x)=x^2\left(4-x^2\right)$

36 $f(x)=\sqrt[3]{x}$

37 $f(x)=x\cos x$

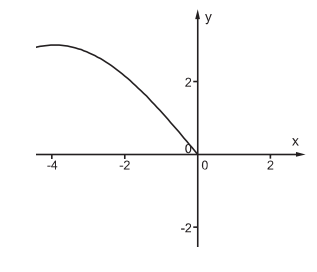
38 $f(x)=\sin^2 x$



39 مجال الدالّة في الرسم المقابل هو $-5\le x\le 5$. أكمل رسم بيان الدالّة في كل حالة:

أ) الدالّة زوجية

ب) الدالّة فردية



مهارات رياضية تجد فيما يلي 4 دوالّ وَ 4 جداول معطيات. عليك أن تجد الدالّة التي تُمثّل كل جدول محدّدًا قيمة c.

$f(x)=cx$ $\quad g(x)=cx^2$ $\quad h(x)=c\sqrt{|x|}$ $\quad k(x)=\frac{c}{x}$

40

x	-4	-1	0	1	4
y	-32	-2	0	-2	-32

41

x	-4	-1	0	1	4
y	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

42

x	-4	-1	0	1	4
y	-8	-32	غير مُعرَّف	32	8

43

x	-4	-1	0	1	4
y	6	3	0	3	6

صواب أم خطأ؟ في التمارين من 44 إلى 47، اذكر إن كانت المقولة صوابًا فعلّله أو خطأ فأثبته بمثالٍ مضاد.

44 إذا كانت f دالّة وَ $f(a)=f(b)$ فإن $a=b$.

45 يُمكن لمستقيم عمودي أن يقطع بيان دالّة مرة واحدة على الأكثر.

46 إذا كان $f(-x)=f(x)$ أيًّا يكن العدد x في مجال f، فإن بيان الدالّة متناظر بالنسبة إلى المحور y.

47 إذا كانت f دالّة، فإن $f(ax)=af(x)$.

48 **فكِّر** اكتب الدالّة $f(x)=|x|+|x-2|$ من دون أن تستعمل المطلق.

الفصل 1

مراجعة الفصل

في التمارين من 1 الى 4، حدّد تقاطعات كل دالّة مع محوري الإحداثيات. إن وُجدت.

1 $y=2x-3$ 2 $y=(x-1)(x-3)$ 3 $y=\frac{x-1}{x-2}$ 4 $y=\frac{4}{x}$

في التمرينين 5 و 6، تحقَّق إن كان البيان متناظرًا .

5 $x^2y-x^2+4y=0$ 6 $y=x\left(x^4-x^2+3\right)$

في التمارين من 7 الى 10 ارسم بيان المعادلة.

7 $-\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}y=1$ 8 $f(x)=7-6x-x^2$

9 $f(x)=\sqrt{5-x}$ 10 $f(x)=|x-4|-4$

في التمرينَيْن 11 و 12، جد نقاط تقاطع بيانَي الدالّتَيْن. إن وُجدت.

11 $x+y=5$ و $3x-4y=8$ 12 $x-y+1=0$ و $y-x^2=7$

13 **فكِّر** اكتب معادلة دالّة بيانها متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل ولها تقاطعان أفقيان عند $x=-2$ و $x=2$.

14 **فكِّر** ما قيمة k التي تجعل بيان الدالّة $f(x)=kx$ يمر في النقطة المحدَّدة؟

أ $(1, 4)$ ب $(-2, 1)$ ج $(0, 0)$ د $(-1, -1)$

في التمرينَيْن 15 و 16، استعمل الميل لتحديد قيمة t بحيث تكون النقاط على استقامة واحدة.

15 $(-2, 5)$ ، $(0, t)$ ، $(1, 1)$ 16 $(-3, 3)$ ، $(t, -1)$ ، $(8, 6)$

في التمارين من 17 الى 20، جِد معادلة مستقيم يمر في النقطة المحدَّدة، وله الميل المحدَّد.

17 $(0, -5)$ ؛ $m=\frac{3}{2}$ 18 $(-2, 6)$ ؛ $m=0$

19 $(-3, 0)$ ؛ $m=-\frac{2}{3}$ 20 $(5, 4)$ والميل غير معرّف

21 جِد معادلة للمستقيم الذي يمرّ في النقطة $(-2, 4)$ وله الخاصيّة المحدَّدة.

أ ميله $\frac{7}{16}$ ب موازٍ للمستقيم $5x-3y=3$

ج يمر في نقطة الأصل د موازٍ للمحور y

22 حدِّد معادلة للمستقيم الذي يمر في النقطة $(1, 3)$ وله الخاصيّة المحدَّدة.

أ ميله $-\frac{2}{3}$ ب متعامد مع المستقيم $x+y=0$

ج يمر في النقطة $(2, 4)$ د موازٍ للمحور x

23 **معدّل التغيّر** آلة جديدة ثمنها 000 500 12 دينار، وهي تخسر من قيمتها بحكم الاستهلاك 000 850 دينار سنويًّا. اكتب دالّة خطّية تمثّل قيمة هذه الآلة بعد t سنة من شرائها. كم تصبح قيمتها بعد 3 سنوات من شرائها؟

24 $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x<0 \\ |x-2| & x\geq 0 \end{cases}$. جِد:

أ $f(-4)$ ب $f(0)$ ج $f(1)$

25 حدِّد مجال كل دالّة ومداها.

أ $f(x)=\sqrt{36-x^2}$ ب $f(x)=\frac{7}{2x-10}$ ج $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 2-x & x\geq 0 \end{cases}$

26 $f(x)=1-x^2$ وَ $g(x)=2x+1$. جِد:

أ $f(x)-g(x)$ ب $f(x)g(x)$ ج $g\left(f(x)\right)$

27 **مساحة** تم قص شريط طوله 24 m لصنع 4 قطع تشكّل مستطيلاً طول ضلعه الأقصر x .

أ اكتب مساحة المستطيل A بدلالة x .

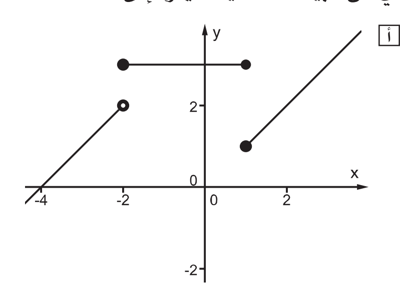
ب حدِّد مجال الدالّة A، وارسم بيانها على المجال الذي حدَّدته.

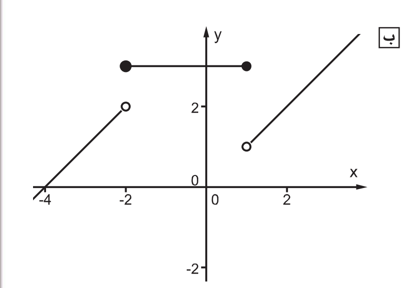
ج استعمل بيان الدالّة لتقدير المساحة الأكبر التي يُمكن أن تكون للمستطيل. اكتب مقولة عن قياسات المستطيل التي تُعطيه المساحة الأكبر.

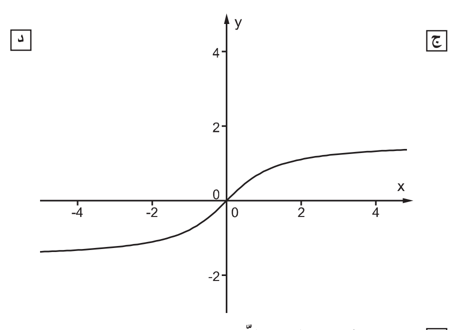
الفصل 1

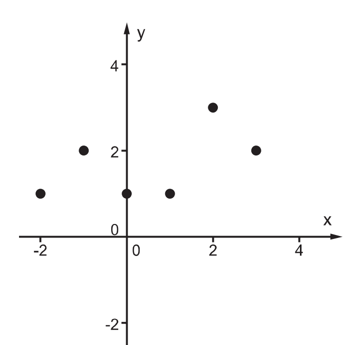
تحضيــر للاختبــار

1 أي من البيانات التالية لا يعود إلى دالة؟

أ


ب


ج


د


هـ كل منها يعود إلى دالّة.

2 ما الإحداثيات لنقاط تقاطع بيانَي الدالّتين $f(x)=3x+1$ وَ $g(x)=x^2-3$؟

أ $x=0$ ب $x=4$ وَ $x=1$ ج $x=-4$ وَ $x=-1$ د $x=4$ وَ $x=-1$

هـ غير ذلك

3 أيٌّ من الدوال التالية فردية؟

أ $f(x)=\cos x$ ب $f(x)=x^2-x+1$ ج $f(x)=x^3-x$ د $f(x)=x^2+x$

هـ كلّها زوجية

4 أيٌّ من الدوال التالية ليست فردية؟

أ $f(x)=\sin x+\frac{1}{x}$ ب $f(x)=x^2-x+1$ ج $f(x)=x^3-x$ د $f(x)=x^3+x$

هـ كلّها فردية

5 أي نقطة لا يمر فيها المستقيم $7x-3y=5$ ؟

أ $(2, 3)$ ب $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ ج $(4, 11)$ د $\left(-\frac{1}{7}, -2\right)$ هـ يمرّ في هذه النقاط جميعها

6 ما ميل المستقيم الذي يمر في النقطتين $(6, 10)$ وَ $(-1, 4)$؟

أ $\frac{7}{6}$ ب $-\frac{7}{6}$ ج $\frac{6}{7}$ د $-\frac{6}{7}$ هـ غير ذلك

7 ما معادلة المستقيم الذي يمر في النقطة $(3, 10)$ ويوازي المستقيم $x-3y=1$ ؟

أ $y=\frac{1}{3}x+9$ ب $y=3x+1$ ج $y=-3x+19$ د $y=-\frac{1}{3}x+11$ هـ غير ذلك

8 ما ميل مستقيم يتعامد مع المستقيم $2x+3y+9=0$ ؟

أ $\frac{2}{3}$ ب $-\frac{2}{3}$ ج $\frac{3}{2}$ د $-\frac{3}{2}$ هـ غير ذلك

9 $f(x)=\begin{cases} 3x+4 & x\le 2 \\ x^2+1 & x>2 \end{cases}$. أي مما يلي يساوي $f(3)$؟

أ 13 ب 10 ج 5 د 3 هـ غير ذلك

10 $f(x)=x^2-3x+4$. أي مما يلي يساوي $f(x+2)-f(2)$؟

أ x^2-3x-4 ب x^2+x ج x^2+x-8 د x^2-3x+4 هـ غير ذلك

11 $f(x)=2-x^2$. أي مما يلي يساوي $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ؟

أ $\frac{x^2-h-h^2}{h}$ ب $\frac{-2x^2-h^2}{h}$ ج $-2x-h$ د $\frac{1}{2}$ هـ غير ذلك

12 ما مجال الدالة $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$؟

أ $\{x / x\neq 1\}$ ب $\{x / x\neq -1\}$ ج $\{x / x\neq 0\}$ د $\mathbb{R}$ هـ غير ذلك

13 ما مجال الدالة $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ ؟

أ $]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$ ب $]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$

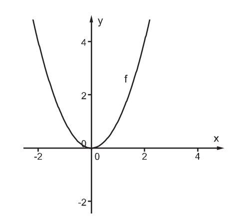
ج $\mathbb{R}$ د $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$ هـ غير ذلك

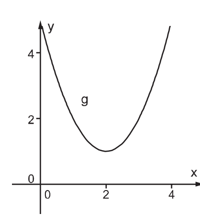
14 ما التحويل الذي يُحوِّل بيان الدالّة $f(x)=x^2$ إلى بيان الدالّة $g(x)=(x+9)^2$ ؟

أ سحب إلى أعلى 9 وحدات ب سحب إلى أسفل 9 وحدات

ج سحب إلى اليمين 9 وحدات د سحب إلى اليسار 9 وحدات هـ غير ذلك

15 استعمل بيان الدالّة $f(x)=x^2$ لكي تجد معادلة الدالّة g ذات البيان الثاني.





أ $g(x)=(x-2)^2+1$ ب $g(x)=(x-1)^2+2$ ج $g(x)=(x+2)^2+1$

د $g(x)=(x+1)^2-2$ هـ غير ذلك

16 جِد $(f+g)(x)$ حيث $f(x)=2x-4$ وَ $g(x)=1+3x$.

أ $5x-3$ ب $x-3$ ج $-(x+3)$ د 0 هـ غير ذلك

17 جِد $(fg)(3)$ حيث $f(x)=x$ وَ $g(x)=x^2-7$.

أ -13 ب 29 ج 5 د 6 هـ غير ذلك

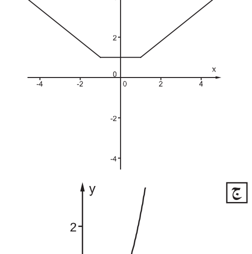
18 جِد $(f\circ g)(x)$ حيث $f(x)=4-2x^2$ وَ $g(x)=2-x$.

أ $4x^2-16x+20$ ب $2x^2-4$ ج $2x^2-2$ د $-2x^3-4x^2-4x+8$

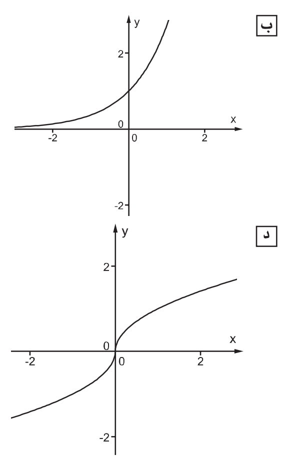
هـ غير ذلك

19 أي من البيانات التالية لا يمثِّل دالّة تباينيّة؟

أ

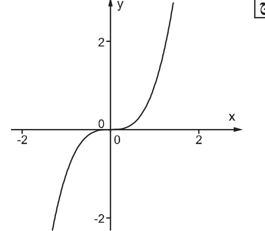


ب



د

ج



هـ جميعها لا تمثِّل دالّة تباينية

20 ما سلوك الدالّة $f(x)=3x^5-7x^2+2$ عندما يسعى x الى $-\infty$ ، وعندما يسعى الى $+\infty$ ؟

أ تسعى الدالّة إلى $-\infty$ عندما يسعى x إلى $-\infty$ ؛ تسعى الدالّة إلى $+\infty$ عندما يسعى x إلى $+\infty$

ب تسعى الدالّة إلى $-\infty$ عندما يسعى x إلى $-\infty$ ؛ تسعى الدالّة إلى $-\infty$ عندما يسعى x إلى $+\infty$

ج تسعى الدالّة إلى $+\infty$ عندما يسعى x إلى $-\infty$ ؛ تسعى الدالة إلى $-\infty$ عندما يسعى x إلى $+\infty$

د تسعى الدالّة إلى $+\infty$ عندما يسعى x إلى $-\infty$ ؛ تسعى الدالّة إلى $+\infty$ عندما يسعى x إلى $+\infty$

هـ غير ذلك

2

النهايات (الغايات) Limits

الفصل الثاني

الدروس

يستعمل بعض المزارعين أنواعًا من الحشرات الطفيلية في مكافحة بعض الآفات التي تُصيبُ المزروعات. تُشكّل الدالّة

$$D(t) = \frac{t^2}{90} + \frac{t}{3}$$

نموذجًا لتزايد هذه الحشرات على النبتة. ما معدّل التغيّر لهذه الحشرات عندما تكون كثافتها 20 حشرة في النبتة؟

هل أنت مستعد؟

المُفْرَدات

1 اربط كل عبارة في العمود الأيمن بتفسيرها في العمود الأيسر.

.1 دالّة نسبية
.2 x يسعى إلى $+\infty$
.3 كتابة مقدار نسبي على أبسط صورة
.4 مدى الدالّة

أ يتخذ x قيمًا تتزايد في الكبر من دون حدود.
ب مجموعة القيم التي تتخذها الدالّة عندما يأخذ x جميع قيم المجال.
ج دالّة مقدار قاعدتها مقدار نسبي.
د دالّة يتضمّن مقدارها نسبة عددين.
هـ كتابة المقدار على صورة نسبة مقدارَيْن حدوديَّيْن لا عامل مشتركًا بينهما.

قراءة البيانات

في التمرينين 2 و3، استعمل الدالّة f التي لها البيان المقابل.

2 جِد قيمة كل من $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$ ، $f(4)$ ، $f(5)$.

3 اكتب قاعدة الدالّة f.

العمليات على الدوال

4 اكتب قاعدة الدالّة $f \circ g$ والدالّة $g \circ f$ حيث $f(x) = x + 1$ وَ $g(x) = \sqrt{x}$.

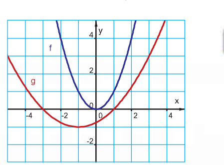
5 هل العلاقة العكسية للدالّة $y = 4x + 3$ بين المتغيّرين x و y دالّة؟ إذا كان الجواب «نعم» اكتب العلاقة العكسية على صورة دالّة وإلا فبرِّر نفيك.

6 هل العلاقة العكسية للدالّة $y = x^2$ بين المتغيّرين x و y دالّة؟ إذا كان الجواب «نعم» اكتب العلاقة العكسية على صورة دالّة وإلا فبرِّر نفيك.

تحويلات الدوال

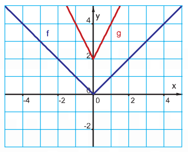
في التمارين من 7 إلى 10، يُظهر الرسم بياني دالتين f و g. حدّد التحويل الهندسي الذي يُحوّل بيان f إلى بيان g واكتب قاعدة g.

7



8



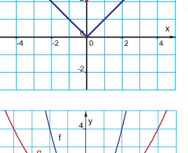


9



10





1-2 مدخل إلى حساب التفاضل والتكامل
Introduction to Calculus

الأهداف

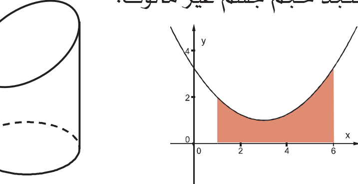
- يُدرك حساب التفاضل والتكامل واختلافه عن الجبر.
- يُدرك أن مسألة المماس مسألة أساسية في حساب التفاضل والتكامل.
- يُدرك أن مسألة المساحة مسألة أساسية في حساب التفاضل والتكامل.

ما حساب التفاضل والتكامل؟

حساب التفاضل والتكامل هو رياضيات التغيّر (السرعة والتسارع). إنه أيضًا رياضيات المماس والميل والمساحة والحجم والطول ومركز الثقل والانحناء وكثير من المفاهيم الأخرى. لقد مكّنت هذه الرياضيات العلماء والمهندسين والاقتصاديين من إنشاء نماذج فعّالة لدراسة حالات من الحياة اليومية.

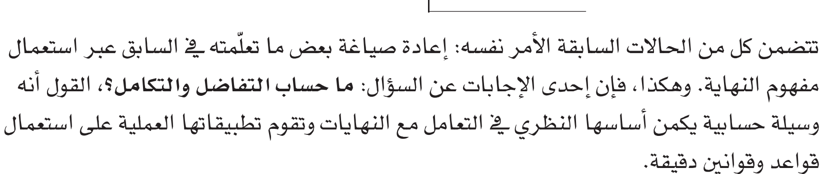
يتميّز حساب التفاضل والتكامل بأنه رياضيات الحركة (Dynamic)، بعكس الرياضيات التي تعلّمتها حتى الآن والتي يُمكن وصفها بأنها رياضيات السكون (Static). إليك بعض الأمثلة:

- يُمكنك دراسة حركة جسم يتحرك بسرعة ثابتة باستعمال الرياضيات التي تعلمتها حتى اليوم. غير أنك تحتاج إلى حساب التفاضل والتكامل لتدرس حركة جسم تتغيّر سرعته مع الزمن.
- يُمكنك تحديد ميل مستقيم باستعمال الرياضيات التي تعلّمتها حتى الآن. لكنك تحتاج إلى حساب التفاضل والتكامل لتجد ميل منحن عند نقطة.
- يُمكنك حساب المساحة أو الحجم للكثير من الأشكال أو الأجسام الهندسية باستعمال الرياضيات التي تعلّمتها حتى اليوم. لكنك تحتاج إلى حساب التفاضل والتكامل لتجد مساحة شكل غير منتظم، أو لتجد حجم جسم غير مألوف.



تتضمن كل من الحالات السابقة الأمر نفسه: إعادة صياغة بعض ما تعلّمته في السابق عبر استعمال مفهوم النهاية. وهكذا، فإن إحدى الإجابات عن السؤال: **ما حساب التفاضل والتكامل؟**، القول أنه وسيلة حسابية يكمن أساسها النظري في التعامل مع النهايات وتقوم تطبيقاتها العملية على استعمال قواعد وقوانين دقيقة.

بتعبير أدق، يتضمن حساب التفاضل والتكامل ثلاثة مستويات: **المستوى الأول** هو الرياضيات التي تعلمتها حتى اليوم و**المستوى الثاني** هو مستوى النهايات و**المستوى الثالث** هو مستوى الاشتقاق والتكامل.



يُشكِّل مفهوم النهاية حجر الأساس في دراسة التفاضل والتكامل. ولكي تتكوّن لديك بعض الأفكار عن دور النهاية في حساب التفاضل والتكامل، إليك وصفًا مختصرًا لمسألتين تاريخيتين من مسائل هذا الموضوع: مسألة المماس ومسألة المساحة.

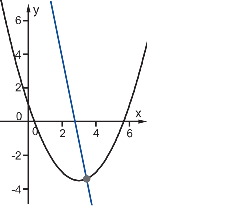
فائدة

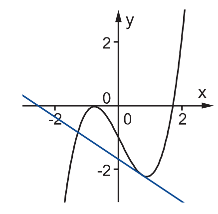
تذكّر دائمًا أنك تدرس حساب التفاضل والتكامل كموضوع أساسي في هذا الصف. ستكون غايتك الأولى أن تتعلم كيف تستعمل هذا الموضوع لكي تُنشئ نماذج لمسائل الحياة بهدف حلها. نذكِّرك بخطوات حل المسائل:

1. تأكد من أنك فهمت السؤال المطروح. ما معطيات المسألة؟ ما المطلوب؟
2. خطّط. هناك طرائق مختلفة يُمكنك استعمالها: ابحث عن نمط، حُلّ مسألة أبسط، عد أدراجك، أنشئ رسمًا بيانيًّا، استعمل التكنولوجيا ...
3. نفّذ مخطّطك. تأكد من أنك أجبت عن السؤال المطروح. قم بصياغة الجواب. مثلاً، بدل أن تكتب الجواب $x = 4.6$، اكتب «مساحة الشكل $4.6\ cm^2$».
4. راجع ما قمت به. هل لجوابك معنى؟ هل من طريقة لتتأكّد من معقوليته؟

مسألة المماس

تعلمت في الصفوف السابقة أن المماس لدائرة مركزها A ، عند نقطة P ، هو المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة وحيدة هي P .
لا يصح هذا التعريف عندما يتعلّق الأمر ببيانات الدوال بشكل عام كما يُوضح ذلك الرسمان أدناه.

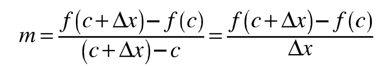




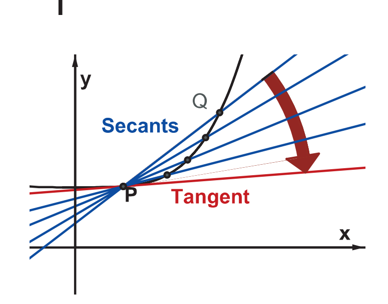
إلا أن مماس الدائرة عند نقطة P هو في الواقع ما يسعى إليه القاطع $\overline{PQ}$ عندما تسعى النقطة Q نحو النقطة P . يُمكننا الانطلاق من هذه الملاحظة لكي ننظر إلى مماس بيان الدالة $f(x)$ عند نقطة P على أنه ما يسعى إليه القاطع $\overline{PQ}$ عندما تسعى النقطة Q إلى P .

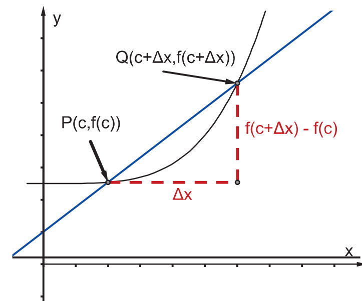
في مسألة المماس، تُعطى دالة f ونقطة P على بيانها، ويُطلب إليك أن تجد معادلة مماس بيان الدالة عند هذه النقطة، كما هو مبيّن في الرسم المقابل.

باستثناء الحالات التي تتضمن مماسًّا عموديًّا، فإن مسألة إيجاد معادلة مماس بيان الدالّة f عند النقطة P تعود إلى إيجاد ميل هذا المماس. يُمكنك حساب قيمة تقريبية لهذا الميل باستعمال مستقيم يمر في نقطة التماس P ونقطة أخرى على بيان الدالّة، كما يُبيّن ذلك الرسم المقابل. يُسمّى مثل هذا المستقيم **قاطعًا** لبيان الدالّة. إذا كانت $P(c, f(c))$ نقطة التماس وَ $Q(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$ نقطة أخرى على البيان، فإن ميل المستقيم الذي يمر بهاتين النقطتين هو



$$m=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{(c+\Delta x)-c}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$





كلما اقتربت النقطة Q من النقطة P ، اقترب ميل القاطع من ميل المماس، كما يبيّن ذلك الرسم الأيسر أعلاه.
إذا كان للقاطع موقع نهائي فإننا نقول عن ميل المماس إنه نهاية ميل القاطع (سوف نعود لاحقًا إلى هذه المسألة).

GRADE12-CHAPTER 2 2013-final 2/12/15 2:01 PM Page 7

استكشاف

تقع النقاط التالية على بيان الدالة $f(x)=x^2$:

$Q_1(1.5, f(1.5))$ $Q_2(1.1, f(1.1))$ $Q_3(1.01, f(1.01))$ ،

$Q_4(1.001, f(1.001))$ $Q_5(1.0001, f(1.0001))$

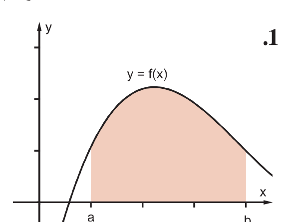
تقترب هذه النقاط على التوالي من النقطة $P(1,1)$. احسب ميل المستقيم الذي يمر في P وَ Q_1 والمستقيم الذي يمر في P وَ Q_2 ... ارسم في المستوي الإحداثي نفسه بيان الدالّة والمستقيمات التي حُسبت ميولها. استعمل النتائج التي توصّلت إليها لكي تجد قيمة تقريبية لميل مماس بيان الدالة عند النقطة P.

مسألة المساحة

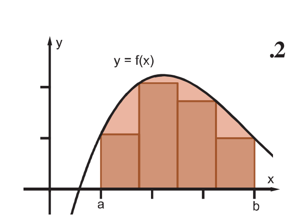
رأيت في مسألة المماس كيف تم تطبيق مفهوم النهاية على ميل مستقيم بهدف إيجاد ميل الدالّة. المسألة التاريخية الثانية في حساب التفاضل والتكامل هي مسألة حساب المساحة لمنطقة يحدّها بيان الدالة. يُمكن حل هذه المسألة أيضًا باستعمال مفهوم النهاية. يتم تطبيق هذا المفهوم باستعمال مساحة المستطيل لإيجاد مساحة منطقة غير مألوفة.

مثلاً، تأمّل المنطقة المحدَّدة ببيان الدالّة $y=f(x)$ والمحور x والمستقيمين العموديين $x=a$ وَ $x=b$ ، كما هو مبيّن في الشكل 1.

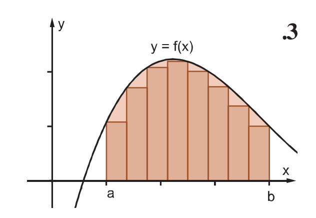
.1



.2



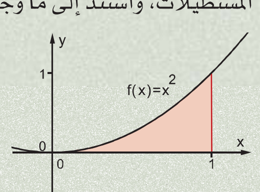
.3

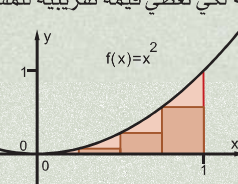


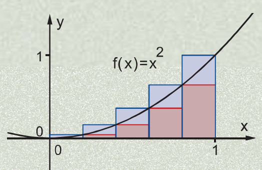
إذا نظرت إلى الشكلين 2 وَ 3 أعلاه، ستجد أن مجموع مساحات المستطيلات هو قيمة تقريبية لمساحة المنطقة. كلما ازداد عدد المستطيلات اقترب مجموع مساحاتها من مساحة المنطقة وكان التقريب أفضل، لأن مساحة المنطقة الواقعة بين بيان الدالّة والمستطيلات تصبح أصغر فأصغر. للحصول على مساحة المنطقة عليك أن تجد نهاية مجموع مساحات المستطيلات، إن وُجدت، عندما يتزايد عدد هذه المستطيلات باستمرار.

استكشاف

انظر إلى المنطقة المحدَّدة ببيان الدالّة $f(x)=x^2$ والمستقيمين $y=0$ وَ $x=1$. يُمكنك تقريب مساحة هذه المنطقة باستعمال مجموعتين من المستطيلات: الأولى يُحيط بها بيان الدالة والثانية تُحيط بهذا البيان، كما هو مبيّن في الرسمين الثاني والثالث أدناه. جِد مساحة كل مجموعة من مجموعتي المستطيلات، واستند إلى ما وجدته لكي تُعطي قيمة تقريبية للمساحة الملوّنة في الرسم الأول.







1-2 التمـاريــن

في التمارين من 1 إلى 9، اذكُرْ إن كان بالإمكان حل المسألة من دون اللجوء إلى مفهوم النهاية.

1 يتحرك جسم على سكة وفق القانون $d=3t^2$، حيث t الزمن بالثواني و d المسافة بالأمتار. جد بدلالة h متوسّط السرعة بين اللحظتين $t=10$ وَ $t=10+h$، ثم استنتج سرعة الجسم عند اللحظة $t=10$.

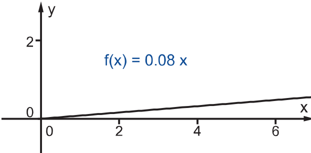
2 جد ميل المماس للدالّة $y=x^2$ عند النقطة $(3, 9)$.

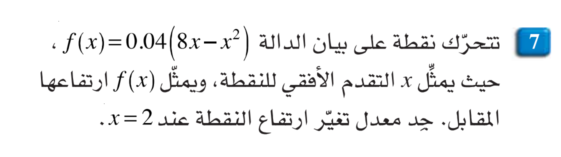
3 ارسم بيان الدالّة $y=\frac{1}{x}$ على الفترة $[1, 2]$. قسّم هذه الفترة 8 أقسام بالتساوي، وجد مساحة المنطقة المحدَّدة بقوس البيان والمحور x والمستقيمين $x=1$ وَ $x=2$.

4 جد المسافة التي يقطعها جسم متحرِّك خلال 15 ثانية، إذا كانت سرعته 7 أمتار في الثانية.

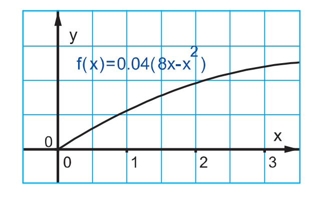
5 يتحرَّك جسم بسرعة غير ثابتة تتغيّر مع الزمن وفقًا للنموذج $v(t)=5+7\cos t$، حيث يرمز t للوقت بالثواني وَ $v(t)$ إلى سرعة الجسم عند اللحظة t بالمتر في الثانية. جد المسافة التي يقطعها هذا الجسم خلال 15 ثانية.

6 تتحرّك نقطة على بيان الدالّة $f(x)=0.08x$، حيث يمثِّل x التقدّم الأفقي للنقطة، ويمثِّل $f(x)$ ارتفاعها المقابل. جِد معدَّل تغيّر ارتفاع النقطة عند $x=2$.

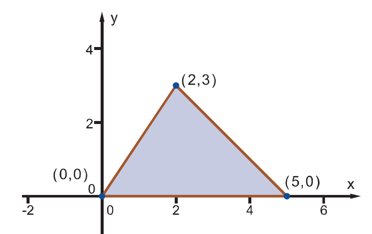




7 تتحرّك نقطة على بيان الدالة $f(x)=0.04(8x-x^2)$، حيث يمثِّل x التقدم الأفقي للنقطة، ويمثّل $f(x)$ ارتفاعها المقابل. جِد معدل تغيّر ارتفاع النقطة عند $x=2$.

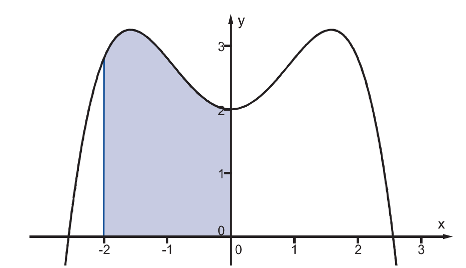


8 جِد قيمة مساحة المنطقة المظلَّلة.





9 جِد مساحة المنطقة المظلّلة.



10 استعمل الدالة $f(x)=4x-x^2$ والنقطة $P(1,3)$ الواقعة على بيانها.

أ ارسم بيان الدالّة f والقواطع التي تمرّ في النقطة P وفي النقاط $Q(x, f(x))$ حيث يتّخذ x القيم 2، 1.5، 0.5 على التوالي.

ب جِد ميل كل من القواطع الثلاثة.

ج استعمل نتائج السؤال ب لتقدِّر ميل مماس بيان الدالّة عند النقطة P . صِف كيف تجعل قيمة ميل المماس أقرب فأقرب إلى قيمته الحقيقية.

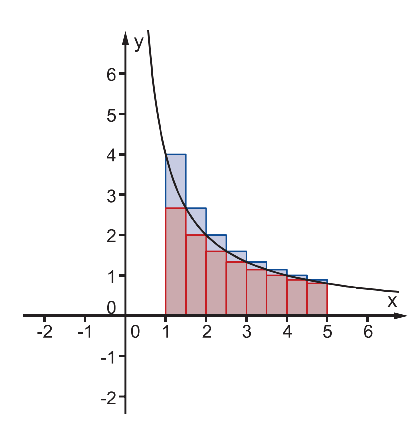
11 استعمل الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ والنقطة $P(4, 2)$ الواقعة على بيانها.

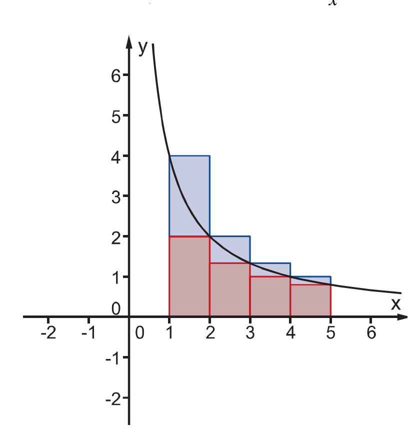
أ ارسم بيان الدالة f والقواطع التي تمر في النقطة P وفي النقطة $Q(x,f(x))$ حيث يتّخذ x القيم 1، 3، 5 على التوالي.

ب جِد ميل كل من القواطع.

ج استعمل نتائج السؤال ب لتقدّر ميل مماس بيان الدالة f عند النقطة P . صِف كيف تجعل قيمة ميل المماس أقرب فأقرب إلى قيمته الحقيقية.

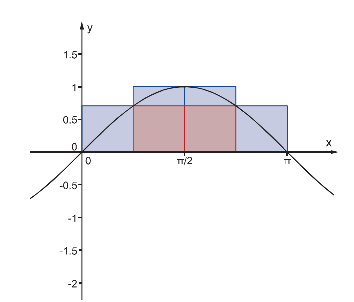
12 أ استعمل المستطيلات في كل رسم لكي تجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحدَّدة ببيان الدالّة $f(x)=\frac{4}{x}$ وَالمستقيمات $y=0$ وَ $x=1$ وَ $x=5$.

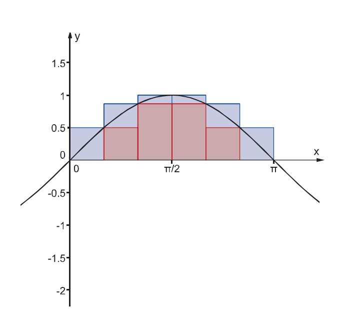




ب أوضح كيف يُمكنك الاستمرار في هذه العملية للحصول على قيمة لمساحة المنطقة تقترب أكثر فأكثر من قيمتها الحقيقية.

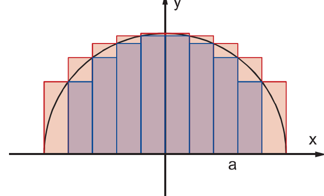
13 أ) استعمل المستطيلات في كل رسم لتجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحدَّدة ببيان الدالّة $f(x)=\sin x$ وَالمستقيمات $y=0$ وَ $x=0$ وَ $x=\pi$.





ب) أوضح كيف يُمكنك الاستمرار في هذه العملية للحصول على قيمة لمساحة المنطقة تقترب أكثر فأكثر من قيمتها الحقيقية.

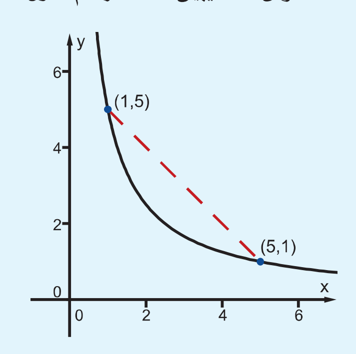
14 استعمل المستطيلات لإيجاد قيمة تقريبية لمساحة نصف دائرة قطرها $2a$. ماذا تفعل لتتوصَّل إلى قيمة أقرب فأقرب من مساحة نصف الدائرة؟

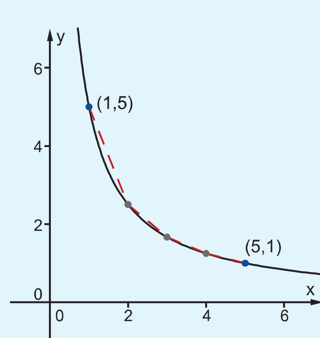


حول المفاهيم

15 استعمل بيان الدالة $f(x)=\frac{5}{x}$ بين النقطتين $(1,5)$ وَ $(5,1)$.

أ) جِد قيمة تقريبية لطول قوس البيان بين النقطتين بحساب المسافة بين طرفي هذا القوس، كما يُبيِّن ذلك الرسم الأول.





ب) جِد قيمة تقريبية جديدة لطول قوس البيان بإيجاد مجموع أطوال القطع المستقيمة الأربع ، كما هو مُبيّن في الرسم الثاني.

ج) أوضح كيف يُمكنك الاستمرار في هذه العملية للحصول على قيم تقريبية لطول قوس البيان تكون أقرب فأقرب إلى طوله الحقيقي.

2-2 إيجاد النهايات بيانيًّا وعدديًّا
Finding Limits Graphically and Numerically

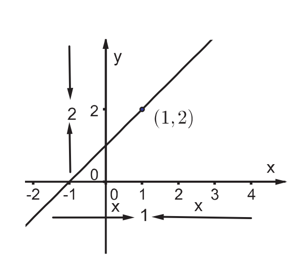
الأهداف

- يُقدّر قيمة نهاية باستعمال طريقة بيانية أو عددية.
- يتعرّف حالات مختلفة حيث لا توجد نهاية.

المفردات
Vocabulary
نهاية Limit

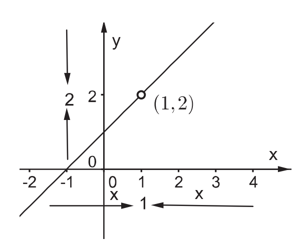
مدخل إلى النهايات(الغايات)

يبيّن الرسم المُقابل بيان الدالة $f(x)=x+1$. لاحظ أنه كلما اقتربت قيمة x من 1، يمينا أو يسارا، فإن $f(x)$ تقترب من 2. نكتب $\lim_{x\to1} f(x)=2$ للتعبير عن هذا الأمر ونقول أن 2 هو نهاية الدالة $f(x)$ عندما يسعى x إلى 1.



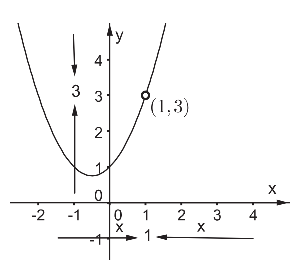
أنظر الآن إلى الرسم المُقابل الذي يُمثل بيان الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ حيث $x\neq1$.

لاحظ أنه كلما اقتربت قيمة x من 1، يمينا ويسارا، فإن $f(x)$ تقترب من 2. يُمكننا أن نكتب $\lim_{x\to1} f(x)=2$ للتعبير عن هذا الأمر. لاحظ أن كون الدالة غير مُعرّفة عند $x=1$ لم يمنع أن يكون للدالة نهاية عندما يسعى x إلى 1.



أنظر الآن إلى الرسم المُقابل الذي يُمثل بيان الدالة $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ حيث $x\neq1$.

لاحظ أنه كلما اقتربت قيمة x من 1، يمينا أو يسارا، فإن $f(x)$ تقترب من 3. يُمكننا أن نكتب $\lim_{x\to1} f(x)=3$ للتعبير عن هذا الأمر. لاحظ أن كون الدالة غير مُعرّفة عند $x=1$ لم يمنع أن يكون للدالة نهاية عندما يسعى x إلى 1.



يمكنك رؤية أن $f(x)$ تقترب من 3 عندما يقترب x من 1 يمينًا ويسارًا باستعمال مجموعتي قيم للمتغير x، تتكوّن إحداهما من قيم تقترب أكثر فأكثر من 1 يسارًا، وتتكوّن الثانية من قيم تقترب أكثر فأكثر من 1 يمينا.

تقترب قيم x من 1 من جهة اليمين — تقترب قيم x من 1 من جهة اليسار

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	؟	3.003	3.030	3.310	3.813

تقترب قيم $f(x)$ من 3 من جهة اليمين — تقترب قيم $f(x)$ من 3 من جهة اليسار

لاحظ أنه، بالرغم من أن x لا يستطيع أن يأخذ القيمة $x=1$، إلا أن بإمكان قيمه أن تقترب أكثر فأكثر من 1 مما يجعل قيم $f(x)$ تقترب أكثر فأكثر من 3. تُعبّر عن ذلك بالكتابة $\lim_{x\to1} f(x)=3$.

استكشاف

يوفّر ما سبق أمثلة توضح كيف تقدّر نهاية معيّنة: عدديًا بإنشاء جدول قيم، وبيانيًا برسم بيان الدالّة. استعمل جدول قيم لتقدير النهاية

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟

مثـــال 1 تقدير نهاية عدديًا

احسب قيم الدالّة $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$ عندما يتخذ x عدّة قيم قريبة من $x = 0$. واستعمل ما تحصل عليه لإعطاء قيمة تقريبية للنهاية.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

f(x) is not defined at x = 0

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

الحـل

يُبيّن الجدول أدناه قيم $f(x)$ عندما يتخذ x عدة قيم قريبة من $x = 0$.

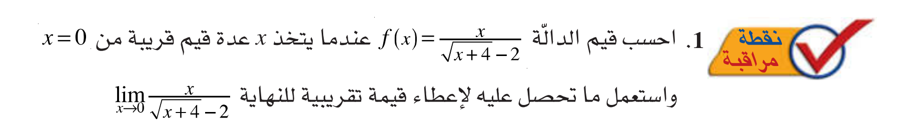
تقترب قيم x من 0 من جهة اليسار — تقترب قيم x من 0 من جهة اليمين

x	−0.01	−0.001	−0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	؟	2.00005	2.00050	2.00499

تقترب قيم $f(x)$ من 2 من جهة اليسار — تقترب قيم $f(x)$ من 2 من جهة اليمين

تُبيّن نتائج الجدول أن من المكن اعتبار 2 قيمة تقريبية لنهاية الدالّة f، عندما يسعى x إلى 0. ويؤكّد الرسم البياني هذا الاستنتاج.

لاحظ أن الدالّة في المثال 1 غير معرّفة عند $x = 0$. وبالرغم من ذلك، فإن الدالّة تبدو وكأنها تسعى إلى نهاية عندما يسعى x إلى 0. غالبًا ما يحدث هذا الأمر. لذا من المهم الانتباه إلى أن كون الدالّة معرّفة أو غير معرّفة عند $x = c$ لا يؤثر على وجود نهاية $f(x)$ عندما يسعى x إلى c.



نقطة مراقبة

1. احسب قيم الدالّة $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$ عندما يتخذ x عدة قيم قريبة من $x = 0$ واستعمل ما تحصل عليه لإعطاء قيمة تقريبية للنهاية $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$

مثـــال 2 نهاية دالّة متفرِّعة القاعدة

جِد نهاية الدالّة

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$$

عندما يسعى x إلى 2.

الحل

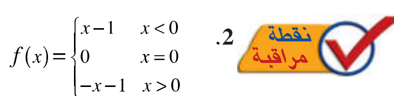
بما أن $f(x)=1$ عندما يتخذ x قيمًا مختلفة عن 2، فيُمكنك الاستنتاج أن النهاية هي 1 كما يُبيّن ذلك الرسم المقابل. يُمكنك أن تكتب

$$\lim_{x\to 2} f(x)=1$$

لم يؤثِّر كون $f(x)$ مُعرّفة عند $x=2$ ولا كون $f(2)=0$، على وجود النهاية ولا على قيمتها. فلو كانت الدالة معرّفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 2\\ 2 & x=2\end{cases}$$

لما تغيّر شيء بخصوص النهاية.



.2

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -x-1 & x>0\end{cases}$$

جِد نهاية الدالّة عندما يسعى x إلى 0.

قمت حتى الآن بتقدير النهايات عدديًّا وبيانيًّا. سوف تتعلَّم في الدرس اللاحق تقنيات جبرية لإيجاد النهايات. حاول أن تنمّي، خلال دراستك لحساب التفاضل والتكامل، عادة استعمال هذه الطرائق الثلاث لحل مسائل النهايات.

- الطرائق العددية إنشاء جدول قيم للدالّة
- الطرائق البيانية رسم بيان الدالّة
- الطرائق الجبرية استعمال الجبر أو حساب التفاضل والتكامل

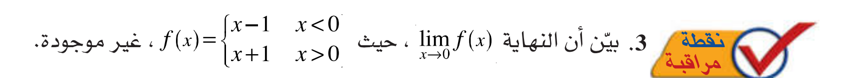
نهايات غير موجودة

سوف تتفحص في الأمثلة الثلاثة التالية حالات تُبيِّن أن النهاية ليست دائمًا موجودة.

مثـــال 3 عندما يختلف السلوك يمينًا ويسارًا

بيّن أن النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ غير موجودة.

ارسم بيان الدالة $f(x)=\frac{|x|}{x}$. إذا نظرت إلى هذا البيان في الشكل المقابل، لوجدت أن $\frac{|x|}{x}=1$ عندما يكون $x>0$ وَ $\frac{|x|}{x}=-1$ عندما يكون $x<0$.
هذا يعني أن قيم $f(x)$ ستكون موجبة أيًّا تكن قيم x إلى يمين 0 ، وستكون سالبة أيًّا تكن قيم x إلى يسار 0، مما يجعل مستحيلاً أن تسعى قيم $f(x)$ إلى القيمة نفسها، عندما يسعى x إلى 0 من اليمين أو من اليسار. ينتج من ذلك أن لا نهاية للدالّة عندما يسعى x إلى 0.



نقطة مراقبة 3. بيّن أن النهاية $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ، حيث $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ ، غير موجودة.

مثـــال 4 سلوك لا حدود له

حدِّد إن كانت النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ موجودة أم لا.

الحـل

يُبيّن الشكل المقابل بيان الدالّة $f(x)=\frac{1}{x^2}$
يُمكنك أن ترى أن قيمة $f(x)$ تتزايد من دون حدود كلما سعى x إلى 0 يمينًا أو يسارًا. هذا يعني أن بإمكانك جعل قيمة $f(x)$ كبيرة قدر ما تريد باختيار قيمة لـ x قريبة من 0 بما يكفي.

مثال على ذلك: يُمكنك جعل قيمة $f(x)$ أكبر من 100 إذا اخترت قيمة لـ x تبعد أقل من $\frac{1}{10}$ عن 0. بالفعل إذا كان $0<|x|<\frac{1}{10}$ فإن $f(x)=\frac{1}{x^2}>100$. كما يُمكنك أن تجعل قيمة $f(x)$ أكبر من 1000 000 إذا اخترت لـ x قيمة تبعد أقل من $\frac{1}{1000}$ عن 0، لأن العلاقة $0<|x|<\frac{1}{1000}$ تنتج $f(x)=\frac{1}{x^2}>1000\,000$. بما أن $f(x)$ لا تقترب من أي عدد محدَّد L عندما يسعى x إلى 0، فإن نهاية الدالّة غير موجودة.

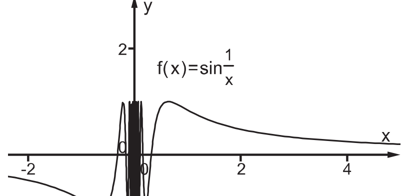


نقطة مراقبة 4. حدِّد إن كانت النهاية $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ موجودة أم لا.

مثـــال 5 سلوك متذبذب.

ادرس وجود النهاية $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

الحل



يُبيّن الشكل المقابل بيان الدالّة

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$. يُمكنك أن ترى أن قيمة $f(x)$ تتذبذب بين 1 وَ -1 كلما سعى x إلى 0 يمينًا أو يسارًا. بالفعل، يمكنك دومًا أن تختار قيمتيّن x_1 وَ x_2 للمتغيّر x قريبتين من 0 قدر ما تريد وتحقّقان $f(x_1)=\sin\frac{1}{x_1}=1$

وَ $f(x_2)=\sin\frac{1}{x_2}=-1$

كما يُبيّن ذلك الجدول أدناه:

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$x\to 0$
$f(x)$	1	-1	1	-1	1	-1	لا وجود للنهاية

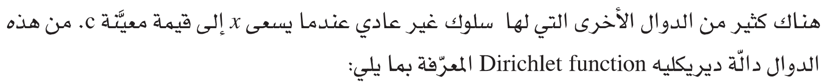


نقطة مراقبة 5. ادرس وجود النهاية $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$.

أنواع السلوك عندما لا توجد نهاية

1. تسعى قيم $f(x)$، عندما يسعى x إلى c يمينًا، إلى عدد يختلف عن العدد الذي تسعى إليه عندما يسعى x إلى c يسارًا.
2. تتزايد قيم $f(x)$، أو تتناقص بشكل غير محدود، عندما يسعى x إلى c.
3. تتذبذب قيم $f(x)$ بين عددَيْن ثابتين مختلفين عندما يسعى x إلى c.

هناك كثير من الدوال الأخرى التي لها سلوك غير عادي عندما يسعى x إلى قيمة معيَّنة c. من هذه الدوال دالّة ديريكليه Dirichlet function المعرّفة بما يلي:



$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$
($\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد النسبية)

ليس لهذه الدالة نهاية عندما يسعى x إلى أي قيمة حقيقية c ؛ فهي بالتالي غير مستمرة عند أي عدد حقيقي. سوف ندرس استمرارية الدوال في درس لاحق.



بيير ديريكليه 1805–1859

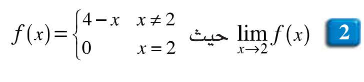
كان ديريكليه أول من أعطى التعريف الحديث للدالّة، مستندًا إلى الدالّة المعروفة باسمه.

2-2 التمارين

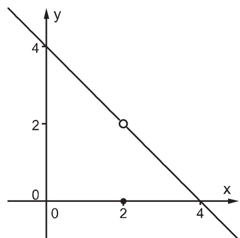
في التمارين من 1 إلى 6، استعمل بيان الدالة لتجد النهاية (في حال وجودها). إذا لم تكن النهاية موجودة، أوضح السبب.

1 $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2\right)$

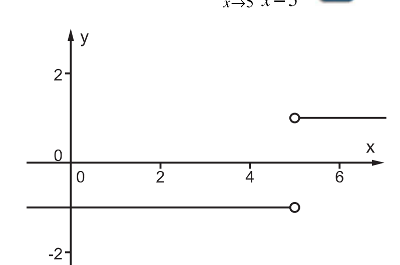
2 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ حيث



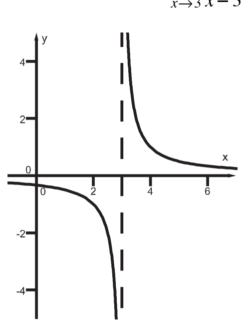
$f(x)=\begin{cases}4-x & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$



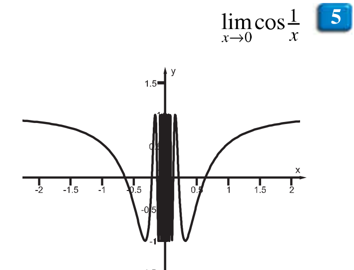
3 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-5|}{x-5}$



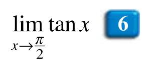
4 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}$

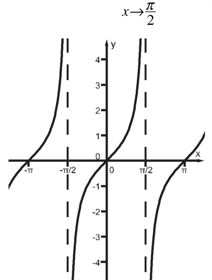


5 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$

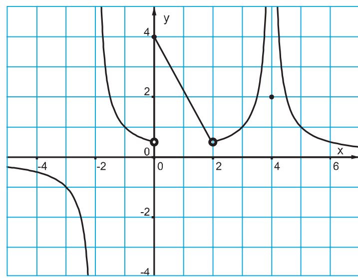


6 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan x$





7 «استعمل الرسم البياني المقابل للإجابة. إذا كانت النهاية موجودة، حدّد قيمة تقريبية لها وإن تكن غير موجودة، أوضح السبب».



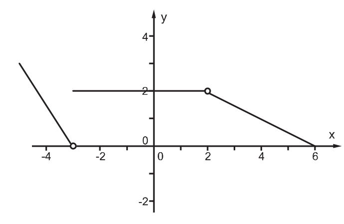
أ $f(-2)$ ب $\lim_{x\to -2} f(x)$

ج $f(0)$ د $\lim_{x\to 0} f(x)$

هـ $f(2)$ و $\lim_{x\to 2} f(x)$

ز $f(4)$ ح $\lim_{x\to 4} f(x)$

8 استعمل بيان الدالّة f لتحدِّد قيم c حيث النهاية $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة.



9 ارسم بيان الدالّة $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 2 \\ 8-2x & 2<x<4 \\ 4 & x\ge 4 \end{cases}$ واستعمله لتحديد قيم c حيث النهاية $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة.

10 استعمل الحاسبة لكي تجد قيمة تقديرية لـ $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ، بحساب قيم هذه الدالّة عندما يتخذ x قيمًا قريبة من 0. ارسم بيانًا تقريبيًّا لهذه الدالّة.

صواب أم خطأ؟ في التمارين من 11 إلى 14، اذكر إن كانت المقولة صوابًا فعلّله، أو خطأ فأثبته بمثال مضاد.

11 إذا كانت الدالّة f غير معرّفة عند $x=c$ فإن $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة.

12 إذا كان $f(c)=L$ ، فإن $\lim_{x\to c} f(x)=L$.

13 إذا كان $\lim_{x\to c} f(x)=L$ ، فإن $f(c)=L$.

14 استعمل الدالة $f(x)=\sqrt{x}$.

أ هل صحيح أن $\lim_{x\to 0.25}\sqrt{x}=0.5$ ؟ أوضح جوابك.

ب هل صحيح أن $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ ؟ أوضح جوابك.

حول المفاهيم

15 اكتب شرحًا مقتضبًا لما تعنيه الكتابة $\lim_{x \to 8} f(x) = 25$.

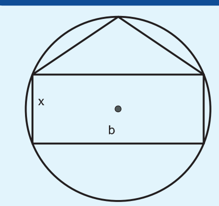
16 إذا كان $f(2) = 4$ ، فهل تستطيع استنتاج أي شيء حول نهاية $f(x)$ ، عندما يسعى x إلى 2؟ أوضح جوابك.

17 إذا كانت نهاية $f(x)$ ، عندما يسعى x إلى 2، تساوي 4، فهل تستطيع استنتاج أي شيء حول $f(2)$ ؟ أوضح تفكيرك.

18 اذكر 3 أنواع من سلوك الدوال تعود إلى عدم وجود نهاية. ارسم بيان دالّة يُعبّر عن كل سلوك.

التحدي

19 يُبيّن الرسمُ مستطيلاً ومثلثًا متساوي الساقين تُحيطُ بهما دائرة نصف قطرها 1. ما قيمةُ x التي تجعلُ مساحتي المستطيل والمثلث متساويتَيْن؟



3-2 حساب النهايات (الغايات)
Finding Limits

الأهداف

- يحسب نهاية دالة باستعمال القواعد.
- يجد طريقة لحساب نهاية ويستعملها.
- يحسب نهاية بكتابة المقدار على أبسط صورة.
- يحسب نهاية باستعمال مبرهنة السندويج.

حساب النهايات

تعلّمت في الدرس السابق كيف تجد، عدديًا وبيانيًا، قيمة تقريبية لنهاية دالّة (في حال وجودها).
سوف تتعلَّم في هذا الدرس كيف تحسب نهاية دالّة باستعمال عدد من القواعد وبعض النهايات المعروفة، كما ستتعلم مبرهنة السندويج، وكيف تستعملها في حساب النهايات.

من قواعد حساب النهايات

قاعدة الدالّة الثابتة إذا كان $f(x)=a$ حيث a عدد حقيقي ثابت، فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=a$.

قاعدة الدالّة الخطّية الأساسية إذا كان $f(x)=x$ ، فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=c$.

قاعدة دالّة القوة إذا كان $f(x)=x^n$ ، فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=c^n$.

قاعدة دالّة الجذر التربيعي إذا كان $f(x)=\sqrt{x}$ ، فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\sqrt{c}$ حيث $c>0$.

قاعدة الضرب في عدد ثابت إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة، فإن $\lim\limits_{x\to c}[af(x)]=a\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ، حيث a عدد حقيقي.

قاعدة المجموع إذا كانت f وَ g دالّتين، وإذا كانت النهايتان $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ موجودتين، فإن

$$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)\ .$$

قاعدة الفرق إذا كانت f وَ g دالّتين، وإذا كانت النهايتان $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ موجودتين، فإن

$$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)\ .$$

قاعدة الضرب إذا كانت f وَ g دالّتين، وإذا كانت النهايتان $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ موجودتين، فإن

$$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to c} f(x)\lim_{x\to c} g(x)\ .$$

مثـــال 1 نهاية دالّة حدودية

جد $\lim_{x\to 2} f(x)$ حيث $f(x)=-2x^5+3x^2-7x+5$.

الحل

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(-2x^5+3x^2-7x+5\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(-2x^5\right)+\lim_{x\to 2}\left(3x^2\right)+\lim_{x\to 2}(-7x)+\lim_{x\to 2}(5)$$ استعمل قاعدة الجمع

$$=-2\lim_{x\to 2}\left(x^5\right)+3\lim_{x\to 2}\left(x^2\right)+(-7)\lim_{x\to 2}(x)+\lim_{x\to 2}(5)$$ استعمل قاعدة الضرب في عدد

$$=-2\times 2^5+3\times 2^2-7\times 2+5=-61$$ استعمل قاعدة دالّة القوة

نقطة مراقبة 1. جد $\lim_{x\to 2} f(x)$ حيث $f(x)=3x^5-2x^3-4x^2-3$

من قواعد حساب النهايات

قاعدة نهاية الدالة الحدودية إذا كانت $f(x)$ دالّة حدودية فإن $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

قاعدة القسمة إذا كانت f وَ g دالّتين، وإذا كانت النهايتان $\lim_{x\to c} f(x)$ وَ $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودتين مع $\lim_{x\to c} g(x)\neq 0$ ، فإن

$$\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

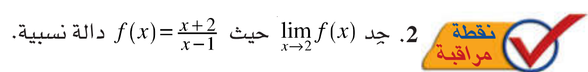
مثـــال 2 نهاية دالّة نسبية

جد $\lim_{x\to 2} f(x)$ حيث $f(x)=\frac{x^2-1}{x-3}$ دالّة نسبية.

الحل

باستعمال قاعدة القسمة، يُمكنك أن تكتب:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{\lim_{x\to 2}\left(x^2-1\right)}{\lim_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2^2-1}{2-3}=-3$$



نقطة مراقبة 2. جد $\lim_{x\to 2} f(x)$ حيث $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ دالة نسبية.

من النهايات التي يُواجهها الطالب، النهاية $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x^n}$ حيث n عدد صحيح موجب. يُمكنك أن تكتب ما يلي، استنادًا إلى قاعدة القسمة: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x^n}=\frac{\lim_{x\to\pm\infty} a}{\lim_{x\to\pm\infty} x^n}=\frac{a}{\pm\infty}=0$.

قد تجد نفسك، عندما تحاول إيجاد نهاية معيّنة، أنك أمام حالة من حالات عدم التعيين مثل $\frac{0}{0}$. يحدث هذا الأمر غالبًا عند البحث عن نهاية دالّة نسبية. سوف ترى في المثال التالي كيف ترفع عدم التعيين جبريًّا وتجد النهاية. سوف تعود إلى هذه المسألة في الفصل اللاحق لتتعلّم طريقة فعّالة في حل مثل هذه الأمور.

مثـــال 3 حالة عدم تعيين

أ جِد $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

ب جِد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

الحل

أ يؤدّي تطبيق قاعدة الدالّة النسبية إلى حالة من حالات عدم التعيين.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\lim_{x\to1}x^2-1}{\lim_{x\to1}x-1}=\frac{0}{0}$$

لرفع عدم التعيين، استعمل $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ عندما $x\neq1$. ينتج من ذلك

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

ب عندما يسعى x إلى $\frac{\pi}{2}$ فإن $\tan^2 x$ يسعى إلى $+\infty$ مما يجعلنا في حالة من عدم التعيين هي:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan^2 x}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\tan^2 x)}=\frac{+\infty}{+\infty}$. لرفع عدم التعيين نلجأ إلى تبسيط المقدار الذي نبحث عن نهايته.

$$\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\sin^2 x$$

مما يؤدي إلى $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2 x=1$.



3. جِد $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$.

مثـــال 4 حالة عدم تعيين

جِد $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$.

الحل

يؤدي تطبيق قاعدة الدالة النسبية إلى حالة من حالات عدم التعيين.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\frac{\lim_{x\to3}\sqrt{x+6}-3}{\lim_{x\to3}x-3}=\frac{0}{0}$$

لرفع عدم التعيين، اضرب البسط والمقام بمرافق البسط، $\sqrt{x+6}+3$ ، تحصل على

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{1}{6}$$



4. جِد $\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

من قواعد حساب النهايات

قاعدة نهاية الدالّة المركّبة إذا كانت f وَ g دالّتين، وإذا كانت النهايتان $\lim_{x\to c} g(x)=L$ وَ $\lim_{x\to L} f(x)$ موجودتين، فإن $\lim_{x\to c}[f(g(x))]=f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)=f(L)$.

مثـــــال 5 نهاية دالّة مركّبة

جِد $\lim_{x\to 2} f(x)$ حيث $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

الحل

الدالّة $f(x)$ دالّة مركّبة من الدالّتين $u(x)=\sqrt{x}$ وَ $v(x)=x^2+4$ ، أي أن $f(x)=\sqrt{x^2+4}=\sqrt{v(x)}=u(v(x))$. ينتج من ذلك

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\sqrt{v(x)}=\sqrt{\lim_{x\to 2} v(x)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$



5. جِد $\lim_{x\to 2} f(x)$ حيث $f(x)=\sqrt{x^3-4}$

من قواعد حساب النهايات

قاعدة الدوالّ المثلّثية

$\lim_{x\to c}\sin x=\sin c$ $\lim_{x\to c}\cos x=\cos c$ $\lim_{x\to c}\tan x=\tan c$ $c\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

مثـــــال 6 نهاية دالّة تتضمّن دالّة مثلّثية

جِد $\lim_{x\to\pi} f(x)$ حيث $f(x)=x\cos x$.

الحل

$$\lim_{x\to\pi} f(x)=\lim_{x\to\pi}(x\cos x)=\lim_{x\to\pi}(x)\lim_{x\to\pi}(\cos x)=\pi\cos\pi=-\pi$$

نقطة مراقبة

6. جِد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ حيث $f(x)=x\sin x$

من قواعد حساب النهايات

قاعدة الدالّة الأسّية الطبيعية $\lim_{x\to c}\left(e^x\right)=e^c$

قاعدة دالّة اللوغاريتم الطبيعي $\lim_{x\to c}(\ln x)=\ln c$ $c>0$.

مثـــال 7 نهاية دالّة أسّية

جد $\lim_{x\to\pi} f(x)$ حيث $f(x)=3e^{\sin x}$.

الحل

$$\lim_{x\to\pi} f(x)=\lim_{x\to\pi}\left(3e^{\sin x}\right)=\lim_{x\to\pi}(3)\lim_{x\to\pi}\left(e^{\sin x}\right)=3e^{\lim_{x\to\pi}\sin x}=3e^{\sin\pi}=3e^{0}=3$$

نقطة مراقبة 7. جد $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث $f(x)=3ln(x+1)$

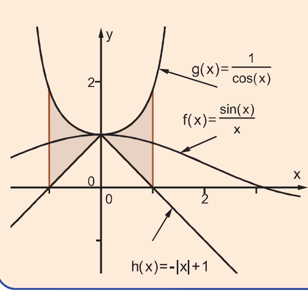
قد لا يكون سهلاً في بعض الحالات، إيجاد نهاية دالّة مباشرة. تساعدك مبرهنة السندويج، في مثل تلك الحالات، على إيجاد النهاية المطلوبة.

مبرهنة 2-1 مبرهنة السندويج

إذا كان $h(x)\le f(x)\le g(x)$ أيًّا تكن قيمة x في جوار $x=c$ ، باستثناء $x=c$ ربما، وإذا كان

$$\lim_{x\to c} h(x)=L=\lim_{x\to c} g(x)$$

فإن النهاية $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة وَ $\lim_{x\to c} f(x)=L$.



تُساعد مبرهنة السندويج على إيجاد بعض النهايات المهمّة مثل النهايتين أدناه.

بعض النهايات المثلّثية

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

مثـــال 8 استعمال مبرهنة السندويج

أ جد $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$.

ب $f(x)$ دالّة تحقّق المتباينة المزدوجة $\frac{1}{(x-1)^2+1}\le f(x)\le (x-1)^2+1$ أيًا كانت قيمة المتغيّر الحر x. جد $\lim_{x\to 1} f(x)$.

الحل

أ بالاستناد إلى المتباينة المزدوجة $-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$ يُمكنك أن تكتب $-x\le x\cos\frac{1}{x}\le x$ إذا كان $x\ge 0$ وَ $-x\ge x\cos\frac{1}{x}\ge x$ إذا كان $x<0$.

يُمكنك أن تستعمل مبرهنة السندويج والمتباينة $-x\le x\cos\frac{1}{x}\le x$ لتستخلص أن $x\cos\frac{1}{x}$ يسعى إلى 0 عندما يسعى x إلى 0 من اليمين. كما يُمكنك أن تستعمل مبرهنة السندويج والمتباينة $-x\ge x\cos\frac{1}{x}\ge x$ لتستخلص أنّ $x\cos\frac{1}{x}$ يسعى إلى 0 عندما يسعى x إلى 0 من اليسار. ما يُثبت أن $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$.

ب يُمكننا أن نكتب، استنادًا إلى مُبرهنة السندويج.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2+1}\le \lim_{x\to 1} f(x)\le \lim_{x\to 1}\left[(x-1)^2+1\right]$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)^2+1\right]}\le \lim_{x\to 1} f(x)\le \lim_{x\to 1}\left[(x-1)^2+1\right]$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2+1}\le \lim_{x\to 1} f(x)\le \lim_{x\to 1}(x-1)^2+1$$

$$\frac{1}{0+1}\le \lim_{x\to 1} f(x)\le 0+1$$

$$1\le \lim_{x\to 1} f(x)\le 1$$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.



8. جد $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

2–3 التمارين

في التمارين من 1 إلى 3، جِد النهاية المطلوبة.

1 $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^3-2x^2+4\right)$ **2** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{x+2}$ **3** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}}{x-4}$

في التمرينَيْن 4 وَ 5، استعمل المعلومات المتوافرة لإيجاد النهاية المطلوبة.

4 $f(x)=5-x$ ؛ $g(x)=x^3$ جِد: أ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ب $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ ج $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$

5 $f(x)=2x^2-3x+1$ ؛ $g(x)=\sqrt[3]{x+6}$ جِد: أ $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ب $\lim\limits_{x\to 21} g(x)$ ج $\lim\limits_{x\to 4} g(f(x))$

في التمارين من 6 إلى 9، جِد النهاية المطلوبة.

6 $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}$ **7** $\lim\limits_{x\to \pi}\cos 3x$ **8** $\lim\limits_{x\to 3}\tan\frac{\pi x}{4}$ **9** $\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{6}}$

في التمرينين 10 وَ 11، استعمل المعلومات المتوافرة لحساب النهايات المطلوبة.

10 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=2$ ؛ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=3$

أ $\lim\limits_{x\to c}\left[5g(x)\right]$ ب $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right]$ ج $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)g(x)\right]$ د $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$

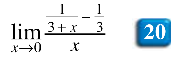
11 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=27$

أ $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[3]{f(x)}$ ب $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{18}$ ج $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\right]^2$ د $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\right]^{\frac{2}{3}}$

في التمارين من 12 إلى 20، جِد النهاية المطلوبة.

12 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$ **13** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$ **14** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

15 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}}{x}$ **16** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$ **17** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$ **19** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ **20**  $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3}}{x}$

في التمارين من 21 إلى 26 جِد النهاية المطلوبة.

21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{5x}$ **22** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(1-\cos x)}{x}$ **23** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\tan x}{x}$

24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$ **25** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{x}$ **26** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (مساعدة: اكتب $\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\dfrac{2\sin 2x}{2x}\times\dfrac{3x}{3\sin 3x}$)

في التمرينين 27 و 28 ، جِد $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

27 $f(x)=\sqrt{x}$ **28** $f(x)=\frac{4}{x}$

في التمرينين 29 و 30، استعمل مبرهنة السندويج لتجد $\lim\limits_{x\to c}f(x)$.

29 $4-x^2\le f(x)\le 4+x^2$ ، $c=0$ **30** $b-|x-a|\le f(x)\le b+|x-a|$ ، $c=a$

حول المفاهيم

31 أوضح ما تعنيه عبارة «دالتان تتماهيان باستثناء نقطة واحدة».

32 أعطِ مثالاً على دالتين تتماهيان باستثناء نقطة واحدة.

33 أوضِح مبرهنة السندويج بأسلوبك.

في التمرينين 34 و 35، استعمل دالة الموقع $s(t)=-4.9t^2+150$ التي تحدِّد موقع حجر سقط من ارتفاع $150\ m$ بعد t ثانية من سقوطه. تُعبِّر النهاية $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{s(a)-s(t)}{a-t}$ عن سرعة الجسم الساقط عند $t=a$.

34 جِد سرعة الحجر عند $t=5$. **35** كم ستكون سرعة الحجر عند اصطدامه بالأرض؟

36 جِد دالّتين f وَ g تحقّقان ما يلي: النهايتان $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ غير موجودتين، في حين أن النهاية $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]$ موجودة.

37 f وَ g تحقّقان ما يلي: $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$ وَ $|g(x)|\le M$ أيًّا يكن x ، باستثناء $x=c$ ، حيث M عدد موجب ثابت. أثبت أن $\lim\limits_{x\to c}f(x)g(x)=0$.

صواب أم خطأ؟ في التمارين من 38 إلى 42، اذكر إن كانت المقولة صوابًا، فعلِّله، وإن كان خطأ فأثبته بمثال مضاد. أو علّله.

38 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=1$ **39** $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x}=1$

40 إذا كان $f(x)=g(x)$ أيًّا يكن x باستثناء $x=0$ وكان $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=L$ ، فإن $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=L$.

41 إذا كان $f(c)=L$ فإن $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$. **42** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$ حيث $f(x)=\begin{cases}3 & x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$.

الفصل 2



1-2 ميل المماس

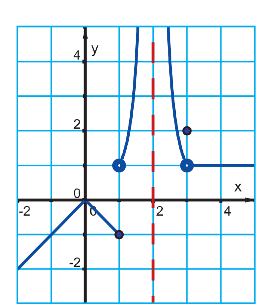
1 استعمل الدالّة $f(x)=1-\frac{4}{x}$ والنقطة $A(1,-3)$ الواقعة على بيانها.

أ ارسم بيان الدالّة والقواطع d_1 وَ d_2 وَ d_3 التي تمر في النقطة A وفي النقاط $Q(x, f(x))$ حيث يتخذ x القيم 3، 2، 1.5 على التوالي.

ب جد ميل كل من هذه القواطع.

ج أوضح كيف تساعدك العملية التي قمت بها في السؤال ب على إيجاد قيمة لميل مماس البيان عند النقطة A.

2 يُبيّن الرسم المقابل بيان دالة $f(x)$. استعمل الرسم لتجد قيم كل من $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$ ، $\lim_{x\to0} f(x)$ ، $\lim_{x\to1} f(x)$ ، $\lim_{x\to2} f(x)$ ، $\lim_{x\to3} f(x)$.



2-2 حساب النهايات

في التمارين من 3 الى 8 ، جِد النهاية المطلوبة.

3 $\lim_{x\to1}\left(2x^3-5x+2\Delta y\right)$

4 $\lim_{x\to-1}\left(5x^2+e^{2x}\right)$

5 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{|x-1|}$

6 $\lim_{x\to2}\frac{2x^2-8}{2-x}$

7 $\lim_{x\to-1}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}}{x+1}$

8 $\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin 2x}{2x-\sin 3x}$

3-2 مبرهنة السندويج

9 استعمل مبرهنة السندويج لتجد $\lim_{x\to0}|x|\sin\frac{1}{x^2}$.

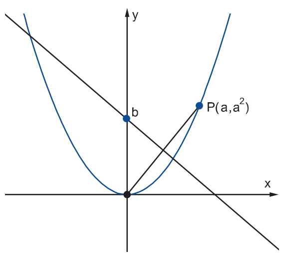
3-2 السقوط الحر

10 تشكّل الدالّة $d(t)=-4.9t^2+60$ نموذجًا لتحديد موقع حجر سقط من ارتفاع 60 مترًا بعد t ثانية من سقوطه. تُعبِّر النهاية $\lim_{t\to a}\frac{d(t)-d(a)}{t-a}$ عن سرعة الحجر عند $t=a$.

أ جد سرعة الحجر بعد ثانية واحدة من سقوطه.

ب جد سرعة الحجر عند ارتطامه بالأرض.

11 $P\left(a,a^2\right)$ ، $a>0$ ، نقطة على بيان القطع المكافئ $f(x)=x^2$.
إذا كان b التقاطع العمودي لمحور القطعة المستقيمة التي تصل النقطة P بنقطة الأصل، فما نهاية b عندما تسعى P إلى نقطة الأصل.



4-2 الدوالّ المستمرة
Continuous Functions

استكشاف

يُفيدك الحدس بأن دالّة ما تكون مستمرة إذا استطعت أن ترسم بيانها من دون أن ترفع القلم عن الورقة. ارسم بيانات الدوال التالية، وحدِّد لكل منها إن كانت مستمرة أم لا.

.1 $f(x)=x+1$ **.2** $f(x)=\frac{1}{x-2}$ **.3** $f(x)=\begin{cases}2x-4 & x\le 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$

الأهداف

- يُميّز استمرارية دالّة عند نقطة.
- يُحدِّد بيانيًّا إن كانت دالّة مستمرة.
- يفهم مبرهنة القيمة الوسيطة ويستعملها.

المفردات Vocabulary

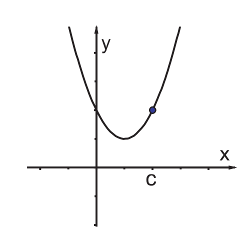
دالّة مستمرة Continuous Function

دالّة منقطعة Discontinuous Function

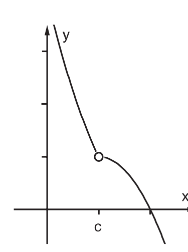
انقطاع قابل للإلغاء Removable Discontinuity

استمرار دالّة عند نقطة

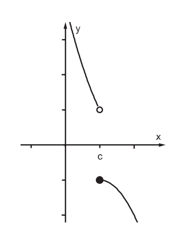
يتوافق معنى كلمة **استمرار** في الرياضيات مع معناها في لغة الحياة اليومية. تقول عن دالة f إنها مستمرة عند النقطة $x=c$ إذا لم يكن بيانها منقطعًا عندها بسبب فجوة أو تباعد. يُبيّن الشكل أدناه ثلاث حالات تكون فيها الدالة غير مستمرة عند النقطة $x=c$ في حين أنها مستمرة عند النقاط الأخرى.



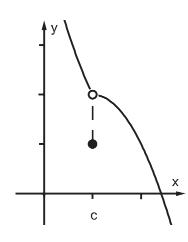
دالة مستمرة عند $x=c$



الدالة غير مُعرّفة عند $x=c$



ليس للدالة نهاية عندما يسعى x إلى c



$\lim_{x\to c} f(x)\ne f(c)$

ثلاثة شروط يجعل كل منها الدالة غير مستمرة عند $x=c$

بيّن الشكل السابق أن أيًّا من الشروط التالية يجعل الدالة غير مستمرة عند $x=c$.

.1 أن تكون الدالة غير مُعرّفة عند $x=c$.

.2 ألاّ يكون للدالّة نهاية عندما يسعى x إلى c.

.3 أن يكون للدالّة نهاية عندما يسعى x إلى c لكن هذه النهاية لا تساوي $f(c)$.

هذه الشروط تدفعنا إلى صياغة تعريف الدالّة المستمرة عند النقطة $x=c$.

تعريف الاستمرارية عند نقطة

تكون الدالّة f **مستمرة** عند النقطة $x=c$ إذا تحقّقت الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة مُعرّفة عند $x=c$.
2. النهاية $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

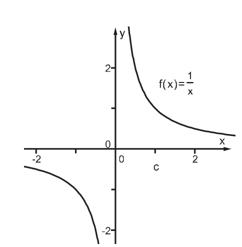
تقول عن دالة أنها **منقطعة** عند النقطة $x=c$ إذا لم تكن مستمرة عند هذه النقطة. يُمكنك، في بعض الحالات، أن تُعيد تعريف دالة منقطعة عند نقطة $x=c$ بحيث تُلغي انقطاعها عند هذه النقطة.
في هذه الحالة، تقول عن هذا الانقطاع أنه **قابل للإلغاء** في حين أنه غير قابل لذلك في الحالة الثانية.

مثـــــال 1 استمرارية دالّة

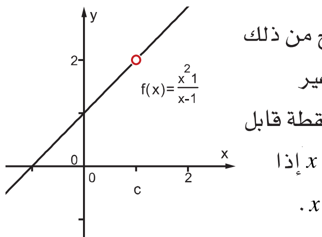
ناقش استمرارية كل من الدوالّ التالية محدِّدًا نقاط انقطاعها، إن وجدت.

أ $f(x)=\frac{1}{x}$ **ب** $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ **ج** $h(x)=\begin{cases} x+1 & x \le 0 \\ x^2+1 & x>0 \end{cases}$ **د** $k(x)=\sin x$

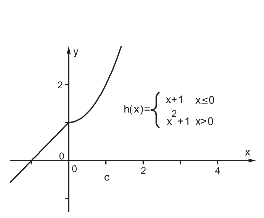
الحل



أ يتألف مجال الدالّة من جميع الأعداد باستثناء 0. ينتج من ذلك أن الدالّة غير مُعرّفة عند النقطة $x=0$ مما يجعلها غير مستمرة عند هذه النقطة. من ناحية أخرى، انقطاع الدالّة عند هذه النقطة غير قابل للإلغاء، لأنك لا تستطيع تعريف $f(0)$ بحيث تكون الدالّة مستمرة عند $x=0$.

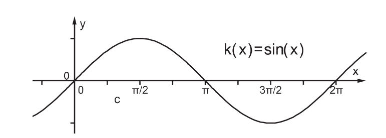


ب يتألّف مجال الدالّة من جميع الأعداد باستثناء 1. ينتج من ذلك أن الدالّة غير مُعرّفة عند النقطة $x=1$ مما يجعلها غير مستمرة. من ناحية أخرى، انقطاع الدالّة عند هذه النقطة قابل للإلغاء لأنك تُحوّل الدالّة إلى دالّة g مستمرة عند $x=1$ إذا عرّفت g كما يلي $g(1)=2$ وَ $g(x)=f(x)$ حيث $x \neq 1$.



ج يتألّف مجال الدالّة من جميع الأعداد الحقيقية. من الواضح أن الدالّة مستمرة عند كل نقطة $x=c$ حيث $c \neq 0$. وبخصوص النقطة $x=0$، فإن الدالّة مستمرة عندها أيضًا، لأن الدالّة مُعرّفة عند $x=0$ من ناحية أولى ولأن لها نهاية تساوي 1 عندما يسعى x إلى c (من اليمين أو من اليسار) من ناحية ثانية، ولأن $\lim_{x \to 0} h(x)=1=h(0)$ من ناحية ثالثة.

د يتألّف مجال الدالّة من جميع الأعداد الحقيقية. من الواضح أن الدالّة مستمرة عند كل نقطة $x = c$ من نقاط مجالها مما يجعلها دالّة مستمرة.





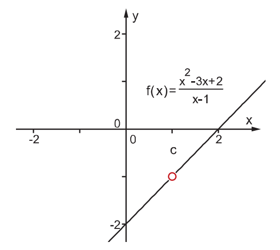
1. ناقش استمرارية كل من الدوال التالية:

أ $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ج $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ -x + 1 & x > 0 \end{cases}$

ب $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ د $k(x) = \cos x$

مثـــال 2 إلغاء انقطاع دالّة عند نقطة

هل الدالّة $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ مستمرة عند النقطة $x = 1$؟ ارسم بيانها وأوضح جوابك. إذا كانت الدالّة منقطعة عند هذه النقطة، حدّد إن كان انقطاعها قابلاً للإلغاء. وفي هذه الحالة أوضح كيف تلغيه بإعادة تعريف الدالّة.



الحل

الدالّة منقطعة عند النقطة $x = 1$ لأنها غيرمعرّفة عند هذه النقطة، وهذا ما يُظهره بيانها. لكن هذا الانقطاع قابل للإلغاء لأن $f(x)$ يسعى إلى -1 عندما يسعى x إلى 1 من جهتي اليمين واليسار. مما يسمح لك بكتابة

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -1$$

لكي تلغي انقطاع الدالّة f عند النقطة $x = 1$، أعد تعريفها على الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$



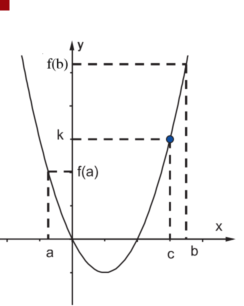
2. هل الدالّة $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x + 2}$ مستمرةعند النقطة $x = -2$؟ ارسم بيانها وأوضح جوابك. إذا كانت الدالّة منقطعة عند هذه النقطة، حدّد إن كان انقطاعها قابلاً للإلغاء وفي هذه الحالة أوضح كيف تلغيه بإعادة تعريف الدالّة.

مبرهنة القيم الوسيطة Intermediate Value Theorem

إذا أمعنت النظر في تغيّر طول الإنسان بتغيّر عمره، فإنك سترى أن طول الإنسان هو في الحقيقة دالّة بدلالة عمره. لكنك سوف تلاحظ أيضًا الأمر التالي: إذا كان طول شخص 150 cm عندما كان في الثانية عشرة، وَ 169 cm في سن العشرين، فإن طوله قد اتّخذ كل القيم التي تقع بين 150 وَ 169 على مر الأيام. كما أنك تلاحظ أن طول هذا الشخص تزايد من 150 cm إلى 169 cm بصورة مستمرة ولم يشهد طوله قفزات. تُعبّر عن هذه الملاحظات بالقول أن طول هذا الشخص دالّة مستمرة عندما يتخذ العمر قيمًا بين 12 وَ 20، وَأن هذه الدالّة تتخذ جميع القيم من 150 إلى 169 .
تتمتع الدوال المستمرة بالخاصية نفسها. هذا ما تؤكّده مبرهنة القيم الوسيطة.

مبرهنة 2-2 القيم الوسيطة

إذا كانت f دالّة مستمرة ما بين النقطتين $x=a$ وَ $x=b$ فإنها تتخذ جميع القيم بين $f(a)$ وَ $f(b)$.
بتعبير أدق إذا كان k عددًا حقيقيًا يقع بين $f(a)$ وَ $f(b)$، نستطيع إيجاد عدد c يقع بين a وَ b يحقّق $f(c)=k$.



جذور المعادلة $f(x)=0$

من أهم التطبيقات لمبرهنة القيم الوسيطة إثبات أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرًا يقع بين عددين.
إذا كانت f دالّة مستمرة بين $x=a$ وَ $x=b$، وإذا كان $f(a)$ وَ $f(b)$ من إشارتين مختلفتين، فإن للمعادلة $f(x)=0$ جذرًا واحدًا على الأقل يقع بين a وَ b.

بما أن $f(a)$ وَ $f(b)$ من إشارتين مختلفتين، فإن 0 قيمة وسيطة بين $f(a)$ وَ $f(b)$. بالاستناد إلى مبرهنة القيمة الوسيطة،هناك عدد حقيقي c يقع بين a وَ b يحقّق $f(c)=0$.

مثـــال 3 تطبيق على مبرهنة القيم الوسيطة

استعمل مبرهنة القيم الوسيطة لتثبت أن للمعادلة $f(x)=0$، حيث $f(x)=x^3+2x-1$، جذرًا يقع بين 0 وَ 1.

الحل

الدالّة f دالّة حدودية، وهي بالتالي دالة مستمرة بين $x=0$ وَ $x=1$. من ناحية أخرى:

$$f(0)=0^3+2(0)-1=-1$$

وَ $$f(1)=1^3+2(1)-1=2$$

بما أن $f(0)<0$ وَ $f(1)>0$ من إشارتين مختلفين، فإن للمعادلة $f(x)=0$ جذرًا يقع بين 0 وَ 1.

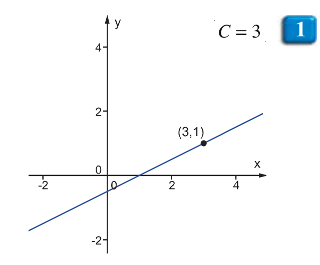


4. استعمل مبرهنة القيم الوسيطة لتثبت أن للمعادلة $f(x)=0$، حيث $f(x)=x^4+2x^2-1$، جذرًا يقع بين 0 وَ 1.

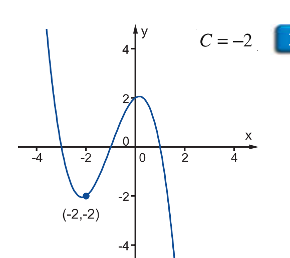
4-2 التمارين

في التمارين من 1 إلى 6، استعمل الرسم البياني لتجد نهاية الدالّة عندما يسعى x إلى c من اليمين ومن اليسار. جد $\lim_{x\to c} f(x)$ (إن وُجدت) ثم ناقش استمرارية الدالّة عند $x=c$.

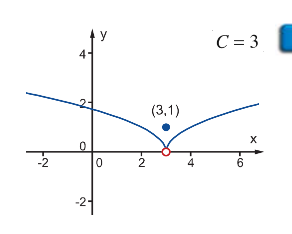
1 $C=3$



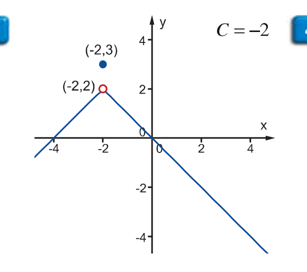
2 $C=-2$



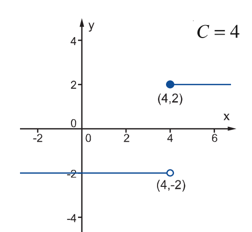
3 $C=3$



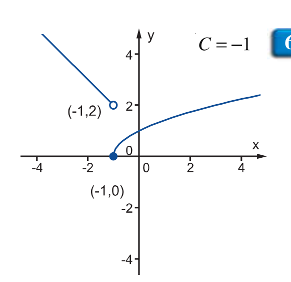
4 $C=-2$



5 $C=4$

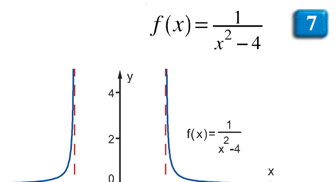


6 $C=-1$

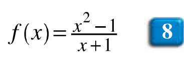


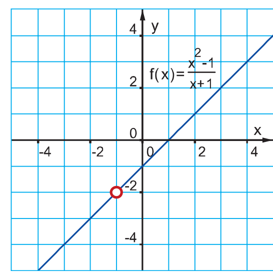
في التمارين من 7 إلى 10، ناقش استمرارية الدالّة.

7 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

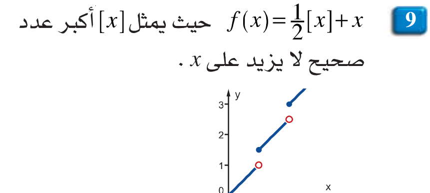


8 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

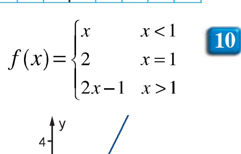


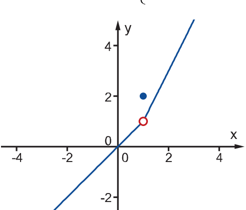


9 $f(x)=\frac{1}{2}[x]+x$ حيث يمثل $[x]$ أكبر عدد صحيح لا يزيد على x.



10 $f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ 2 & x=1 \\ 2x-1 & x>1 \end{cases}$





GRADE12-CHAPTER 2 2013-final 2/12/15 2:01 PM Page 30

في التمارين من 11 إلى 16، جِد قيم x حيث الدالّة منقطعة (إن وجدت)، وحدّد إن كان الانقطاع قابلاً للإلغاء.

11 $f(x)=x^2-2x+1$

12 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

13 $f(x)=\frac{x}{x^2-x}$

14 $f(x)=\frac{x}{x-1}$

15 $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$

16 $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & x<1\\ x & x\geq 1\end{cases}$

في التمرينين 17 وَ 18، حدّد قيمة a أو قيمتي a وَ b لكي لا تتضمّن الدالّة نقاط انقطاع.

17 $f(x)=\begin{cases}x^3 & x\leq 2\\ ax^2 & x>2\end{cases}$

18 $f(x)=\begin{cases}2 & x\leq -1\\ ax+b & -1<x<3\\ -2 & x\geq 3\end{cases}$

حول المفاهيم

19 أوضح الفرق بين انقطاع قابل للإلغاء وآخر غير قابل للإلغاء. أعطِ خلال شرحك، مثالاً على:

أ دالّة منقطعة عند $x=2$ وانقطاعها غير قابل للإلغاء.

ب دالّة منقطعة عند $x=-2$ وانقطاعها قابل للإلغاء.

ج دالّة تحقّق الشرطَين السابقَيْن معًا.

صواب أم خطأ؟ في التمارين من 20 إلى 23، اذكر إن كانت المقولة صوابًا فبرِّرهُ، أو خطأ فأثبته بمثال مضاد.

20 إذا كان $\lim_{x\to c} f(x)=L$ وَ $f(c)=L$ فإن الدالة f مستمرة عند $x=c$.

21 إذا كان $f(x)=g(x)$ عندما $x\neq c$ وَ $f(c)\neq g(c)$ فإن إحدى الدالتين على الأقل منقطعة عند $x=c$.

22 يُمكن لدالّة نسبية أن يكون لها عدد غير محدود من نقاط الانقطاع.

23 الدالّة $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ مستمرة وليس لها نقاط انقطاع.

24 $f(x)=\frac{\sqrt{x+a^2}-a}{x}$ حيث $a>0$. ما مجال الدالة f؟ كيف تُعرِّف $f(0)$ لكي تُصبح الدالّة مستمرة عند $x=0$.

25 **دالّة الإشارة** هي الدالة

$$s(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

ارسم بيان الدالة s وجِد النهايات التالية (إن كانت موجودة):

أ $\lim_{x\to 0^-} s(x)$

ب $\lim_{x\to 0^+} s(x)$

ج $\lim_{x\to 0} s(x)$

26 استعمل مُبرهنة القيم الوسيطة لتُبيّن أن للدالّة $f(x)=x^3-x^2+x-2$ صفرًا بين 0 وَ 3.

5–2 الغايات اللانهائية
Infinite limits

الأهداف

- يجد النهايات اللانهائية من اليمين ومن اليسار.
- يجد المحاذيات العمودية للدالة ويرسم هذه المحاذيات.

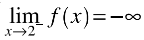
المفردات Vocabulary

نهاية لا نهائية
Infinite Limit

محاذٍ عمودي
Vertical Asmptote

الغايات اللانهائية

يُظهِرُ الرسم المقابل بيان الدالّة $f(x)=\frac{3}{x-2}$. يُمكنك استعمال هذا البيان والجدول أدناه لترى أن قيم $f(x)$ تتناقص من دون حدود عندما يقترب x أكثر فأكثر من 2 لجهة اليسار. تعبّر عن هذا الأمر بالقول إن $f(x)$ يسعى إلى $-\infty$ عندما يسعى x إلى 2 من اليسار؛ وتكتب ذلك



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

كما أن قيم $f(x)$ تتزايد من دون حدود عندما يقترب x أكثر فأكثر من 2 لجهة اليمين. تعبّر عن هذا الأمر بالقول إن $f(x)$ يسعى إلى $+\infty$ عندما يسعى x إلى 2 من اليمين وتكتب ذلك

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

يسعى x إلى 2 من اليسار ← → يسعى x إلى 2 من اليمين

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	−6	−30	−300	−3000	؟	3000	300	30	6

تتناقص قيمة $f(x)$ من دون حدود ← → تتزايد قيمة $f(x)$ من دون حدود

تقول عن دالّة f إنها تسعى إلى غاية **لا نهائية** عندما يسعى x إلى قيمة c إذا تزايدت قيمة $f(x)$ أو تناقصت من دون حدود.

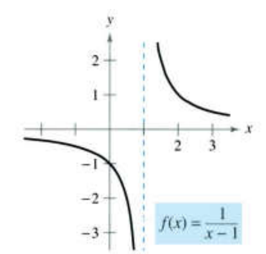
استكشاف

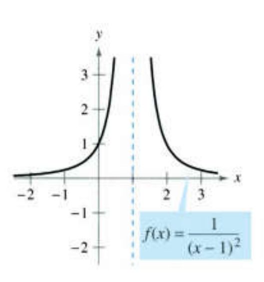
ارسم بيان كل دالّة. حدِّد لكل دالّة عددًا حقيقيًّا c لا ينتمي إلى مجالها. جد، بيانيًا، نهاية $f(x)$ عندما يسعى x إلى c من اليمين ومن اليسار.

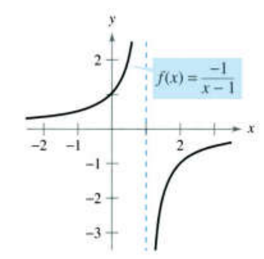
1. $f(x)=\frac{3}{x-4}$
2. $f(x)=\frac{1}{2-x}$
3. $f(x)=\frac{2}{(x-3)^2}$

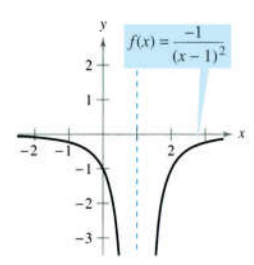
مثـــــال 1 إيجاد غايات لا نهائية، بيانيًّا

استعمل البيانات أدناه لتحديد نهاية كل دالّة عندما يسعى x إلى 1 من اليمين ومن اليسار.









الحـل

.1 $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$

.2 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ النهاية هي $+\infty$ من كل جهة.

.3 $\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x-1}=+\infty \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$

.4 $\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$ النهاية هي $-\infty$ من كل جهة.

نقطة مراقبة

.1 جد نهاية كل دالّة عندما يسعى x إلى -1 من اليمين ومن اليسار.

أ $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ب $f(x)=\frac{1}{|x+1|}$ ج $f(x)=\frac{-1}{x+1}$

المحاذيات العمودية

لو كان بإمكانك أن تمد بيان الدالّة $f(x)=\frac{1}{x-1}$ السابق نحو الأعلى من يمين المستقيم المنقط الأحمر ونحو الأسفل من يساره، لرأيت أن البيان يقترب أكثر فأكثر من هذا المستقيم دون أن يصل إليه. تعبّر عن هذا الأمر بقولك إن هذا المستقيم هو **محاذٍ عمودي** لبيان الدالّة أو للدالّة. (سوف تدرس لاحقًا نوعًا آخر من المحاذيات).

تعريف المحاذيات العمودية

إذا سعى $f(x)$ إلى $+\infty$ أو $-\infty$ عندما يسعى x إلى c ، فإن المستقيم العمودي $x=c$ **محاذٍ عمودي** لبيان الدالّة أو للدالّة.

إذا عدت إلى المثال 1 لوجدت أن كلاً من الدوال الأربع هي دالّة نسبية، وأن لكل منها محاذيًا عموديًّا هو المستقيم $x=1$. لاحظ أن العدد 1 يحوّل المقام إلى 0 بالتعويض ولا يحوّل البسط إلى 0.

يُمكنك تعميم هذه الملاحظة عبر المبرهنة التالية.

مبرهنة 2-3 **المحاذي العمودي**

إذا كانت f وَ g دالّتين مستمرتين وإذا كان $f(c)\neq 0$ وَ $g(c)=0$ في حين أن $g(x)\neq 0$ في جوار $x=c$ ، فإن المستقيم $x=c$ محاذٍ عمودي للدالّة

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

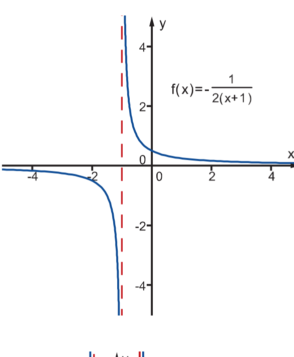
أي أن $x=c$ يجعل المقام فقط يُساوي 0 .

مثال 2 إيجاد المحاذيات العمودية

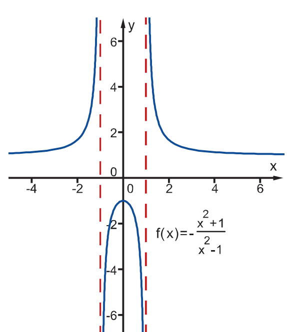
جد جميع المحاذيات العمودية لكل دالّة.

.1 $f(x)=\frac{1}{2(x+1)}$ **.2** $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ **.3** $f(x)=\frac{1}{\tan x}$

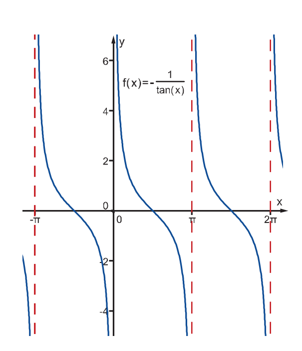
الحل



.1 تتخذ مقام الدالة $f(x)=\frac{1}{2(x+1)}$ القيمة 0 عند $x=-1$ في حين أن البسط لا يساوي 0 عند هذه النقطة. بالاستناد إلى مبرهنة المحاذي العمودي، يشكّل المستقيم $x=-1$ محاذيًا عموديًّا للدالّة.



.2 يُمكنك إعادة كتابة الدالّة باستعمال التحليل على الصورة التالية $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$. تُوضح كتابة الدالّة على هذه الصورة أن 1 وَ -1 يحوّلان المقام إلى 0 بالتعويض. من ناحية أخرى، فإن أيا من هذين العددين لا يحوّل البسط إلى 0. ينتج من ذلك، وبالاستناد إلى مبرهنة المحاذي العمودي، أن كلاً من المستقيمين $x=1$ وَ $x=-1$ محاذٍ عمودي للدالّة، كما يُبيّن ذلك الرسم البياني المقابل.



3. يُمكنك إعادة كتابة الدالّة على الصورة $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$. يتحوّل المقام إلى 0 عندما يتخذ x القيم التي تحوّل $\sin x$ إلى 0. إنها مضاعفات π . من ناحية أخرى، لا تحوّل هذه القيم البسط إلى 0. ينتج من ذلك، وبالاستناد إلى مبرهنة المحاذي العمودي، أن المستقيمات $x=n\pi$ ، حيث $n\in\mathbb{Z}$ جميعها محاذيات عمودية لهذه الدالّة، كما يُبيّن ذلك الرسم البياني المقابل.

إن شرط أن يكون $f(c)\neq 0$ في مبرهنة المحاذي العمودي شرط أساسي لكي يكون المستقيم $x=c$ محاذيًا عموديًّا للدالّة. (انظر المثال 3).



2. جد جميع المحاذيات العمودية لكل دالة.

أ $f(x)=\frac{2}{3x-2}$ ب $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$ ج $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

مثـــال 3 دالّة نسبية لبسطها ومقامها عامل مشترك

جد جميع المحاذيات العمودية للدالّة:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$$

الحل

ابدأ بكتابة الدالّة على أبسط صورة.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}=\frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x+4}{x+2};\quad x\neq -2$$

هناك عددان 2 وَ -2 ، يُحوّلان المقام إلى صفر بالتعويض. من الواضح أن $x=-2$ محاذٍ عمودي للدالّة، لأنه يُحوّل المقام إلى 0 بالتعويض، ولا يحوّل البسط إلى 0.

أما $x=2$ ، فيُحوّل البسط والمقام إلى 0 بالتعويض. إن بيان الدالة f يتطابق مع بيان الدالة $g(x)=\frac{x+4}{x+2}$ عندما يكون $x\neq 2$. تكشف لك هذه الملاحظة أن قيمة $f(x)$ لا تسعى إلى $+\infty$ ولا إلى $-\infty$ عندما يسعى x إلى 2، وبالتالي فإن المستقيم $x=2$ ليس محاذيًا عموديًّا للدالّة.

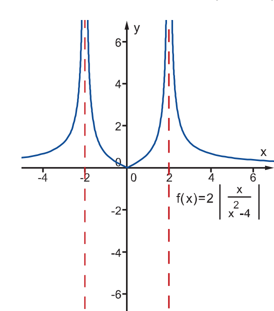


3. جد جميع المحاذيات العمودية للدالّة $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$.

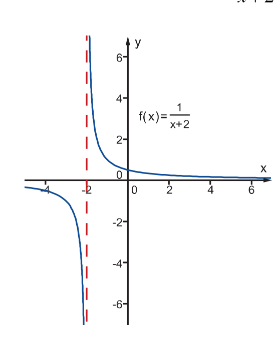
5-2 التمـــارين

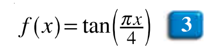
في التمارين من 1 إلى 4، جِد نهاية $f(x)$ عندما يسعى x إلى -2 من اليمين ومن اليسار.

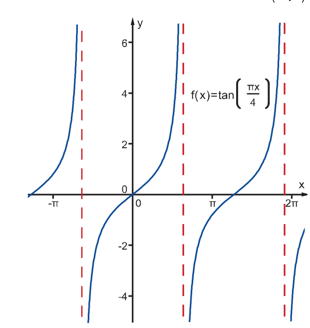
1 $f(x)=2\left|\dfrac{x}{x^2-4}\right|$



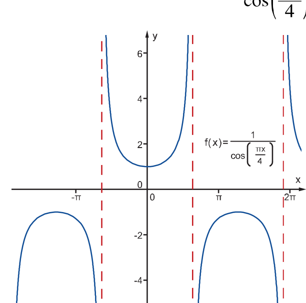
2 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$



3 
$f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$



4 $f(x)=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)}$



في التمارين من 5 إلى 13، جد المحاذيات العمودية للدالّة في حال وجودها.

5 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

6 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$

7 $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2-x-2}$

8 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

9 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

10 $f(x)=\dfrac{1}{\cos(\pi x)}$

11 $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

12 $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$

13 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$

حول المفاهيم

14 اشرح، بأسلوبك، معنى النهاية اللانهائية. هل $+\infty$ عدد حقيقي؟

15 اشرح المحاذي العمودي بأسلوبك.

16 اكتب دالّة نسبية لها محاذٍ عمودي عند $x=6$، وآخر عند $x=-2$ ولها صفر عند $x=3$.

17 هل لكل دالّة نسبية محاذٍ عمودي؟ أوضح جوابك.

18 **متوسط السرعة** تبلغ المسافة بين مدينتين d km . قطع سائق المسافة ذهابًا وإيابًا وكان معدّل سرعته في رحلة الذهاب والإياب 50 km/h . كانت سرعته في الذهاب x km/h ، وفي الإياب y km/h.

أ تحقّق من أن العلاقة بين x وَ y تُكتب على الشكل التالي: $y=\frac{25x}{x-25}$. ما مجال الدالّة المعرّفة بـ $f(x)=y$ ؟

ب أكمل الجدول

x	30	40	50	60
y				

هل تختلف قيم y عن تلك التي توقعتها؟ أوضح جوابك.

ج جِد نهاية y عندما يسعى x إلى 25 من اليمين وفسّر النتيجة.

صواب أم خطأ؟ في التمارين من 19 إلى 22، اذكر إن كانت المقولة صوابًا فبرِّرهُ، أو خطأ فأثبته بمثال مضاد.

19 إذا كانت $p(x)$ دالّة حدودية، فإن للدالّة $f(x)=\frac{p(x)}{x-1}$ محاذيًا عموديًّا عند $x=1$.

20 إذا كانت f دالّة نسبية فإن لها محاذيًا عموديًّا واحدًا على الأقل.

21 لا محاذيات عمودية لدالّة حدودية.

22 إذا كان للدالّة f محاذٍ عمودي عند $x=0$ فلا تكون معرّفة عند هذه النقطة.

23 جِد دالّتين f وَ g حيث $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ وَ $\lim_{x\to c} g(x)=+\infty$ في حين أن $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]\neq 0$.

الفصل 2 مــراجعــة الفصــل

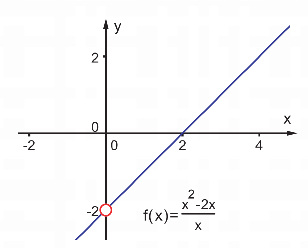
في التمرينين 1 وَ 2، حدّد إن كان حل المسألة يتطلب استعمال حساب التفاضل والتكامل أم أن بالإمكان حلها باستعمال أدوات الجبر فقط. إن كان الحل ممكنًا بأدوات الجبر، فجِد الحل.

1 جِد طول القطعة المستقيمة بين النقطتين $(1, 1)$ وَ $(3, 9)$ على بيان الدالّة $f(x)=4x-3$.

2 جِد طول القوس المحدَّد بالنقطتين $(1, 1)$ وَ $(3, 9)$ على بيان الدالّة $f(x)=x^2$.

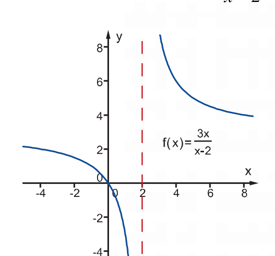
في التمرينين 3 وَ 4، استعمل الرسم البياني لتجد النهايات المطلوبة.

3 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x}$



أ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

4 $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$



أ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

في التمارين من 5 إلى 15، جِد النهاية المطلوبة، إن كان ذلك ممكنًا.

5 $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x+2}$ **6** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$ **7** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ **9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}-1}{x}$ **10** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^3+8}$

11 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{4x}{\tan x}$ **12** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^3+125}{x+5}$ **13** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

14 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\Delta x\right)-\frac{1}{2}}{\Delta x}$ (تذكَّر أن $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$)

15 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(\pi+\Delta x)+1}{\Delta x}$ (تذكَّر أن $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$)

في التمرينين 16 وَ 17، جِد النهاية المطلوبة، علمًا بأن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=-\frac{3}{4}$ وَ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\frac{2}{3}$.

16 $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)g(x)\right)$ **17** $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)+2g(x)\right)$

في التمارين من 18 إلى 23، جِد النهاية المطلوبة أو علِّلْ عدم وجودها.

18 نهاية الدالّة $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$ عندما يسعى x إلى 3 من اليمين.

19 $\lim_{x\to 4}[x-1]$ حيث $[x-1]$ هو أكبر عدد صحيح يقل عن $x-1$ أو يساويه.

20 $\lim_{x\to 2}f(x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2 & x\le 2\\ 2-x & x>2\end{cases}$

21 نهاية الدالّة $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x\le 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ عندما يسعى x إلى 1 من اليمين.

22 $\lim_{x\to 1}f(x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & x<1\\ \frac{1}{2}(x+1) & x\ge 1\end{cases}$

23 $\lim_{x\to -2}f(x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}-x^2-4x-2 & x\le -2\\ x^2+4x+6 & x>-2\end{cases}$

في التمارين من 24 إلى 32، اذكر إن كان للدالّة نقاط انقطاع. إذا كان لها نقاط انقطاع، فجدها.

24 $f(x)=[x+3]$ حيث $[x+3]$ هو أكبر عدد صحيح يقل عن $x+3$ أو يُساويه.

25 $f(x)=\frac{3x^2-x-2}{x-1}$

26 $f(x)=\begin{cases}5-x & x\le 2\\ 2x-1 & x>2\end{cases}$

27 $f(x)=\begin{cases}\frac{3x^2-x-2}{x-1} & x\ne 1\\ 0 & x=1\end{cases}$

28 $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

29 $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

30 $f(x)=\frac{3}{x+1}$

31 $f(x)=\frac{x+1}{2x+2}$

32 $f(x)=\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}$

33 جِد قيمة c بحيث لا يكون للدالّة $f(x)=\begin{cases}x+3 & x\le 2\\ cx+6 & x>2\end{cases}$ نقاط انقطاع.

34 جِد قيمة c وقيمة b بحيث لا يكون للدالّة $f(x)=\begin{cases}x+1 & 1<x<3\\ x^2+bx+c & |x-2|\ge 1\end{cases}$ نقاط انقطاع.

35 استعمل مبرهنة القيم الوسيطة لتثبت أن للدالّة $f(x)=2x^3-2x-1$ جذرًا يقع بين 1 وَ 2.

في التمارين من 36 إلى 39، حدّد المحاذيات العمودية في حال وجودها.

36 $f(x)=1+\frac{2}{x}$

37 $f(x)=\frac{4x}{4-x^2}$

38 $f(x)=\frac{8}{(x-10)^2}$

39 $f(x)=\frac{1}{\sin\pi x}$

40 استعمل الدالّة $f(x)=\frac{\tan 2x}{x}$ حيث $x\ne 0$.

أ جِد $\lim_{x\to 0}f(x)$ في حال وجودها.

ب هل يُمكنك إعادة تعريف هذه الدالة عند $x=0$ ، بحيث تصبح مستمرة عند هذه النقطة؟ أوضح جوابك.

الفصل 2

تحضيــر للاختبـار

استعمل الدالّة $f(x)=\begin{cases} 2-x & x\le 1 \\ \frac{x}{2}+1 & x>1 \end{cases}$ **لحل التمارين من 1 إلى 4.**

1 ما هي $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ غير موجودة

2 ما هي $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ غير موجودة

3 ما هي $\lim_{x\to 1} f(x)$ ؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ غير موجودة

4 ما هي $f(1)$ ؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ غير ذلك

5 ما هي $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2}$ ؟

أ $-\infty$ ب $+\infty$ ج 1 د $-\frac{1}{2}$ هـ -1

6 ما هي $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{x}$ ؟

أ $\frac{1}{2}$ ب 1 ج 2 د $\cos 2$ هـ غير موجودة

7 ما هي $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ ؟

أ $\frac{1}{3}$ ب 1 ج 3 د $\sin 3$ هـ غير موجودة

8 على أي فترة يكون للدالّة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ نقطة أو نقاط انقطاع؟

أ $]0, +\infty[$ ب $[0, +\infty[$ ج $]1, 2[$ د $]0, 2[$ هـ $[1, +\infty[$

9 أي من النقاط التالية ليست نقطة انقطاع للدالّة $f(x)=\sqrt{x-1}$ ؟

أ $x=-1$ ب $x=-\frac{1}{2}$ ج $x=0$ د $x=\frac{1}{2}$ هـ $x=1$

10 أي مما يلي لا يصحّ في الدالّة $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 1 & x=1\\ -x+3 & 1<x<2\end{cases}$ ؟

أ $f(1)$ غير معرّفة

ب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ موجودة

ج $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ موجودة

د $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة

هـ $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

11 أي من النقاط التالية نقطة انقطاع غير قابلة للإلغاء، للدالة $f(x)=\frac{x(x-1)(x-2)^2(x+1)^2(x-3)^2}{x(x-1)(x-2)(x+1)^2(x-3)^3}$ ؟

أ $x=-1$

ب $x=0$

ج $x=1$

د $x=2$

هـ $x=3$

12 أي مما يلي لا يصح في الدالّة $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x & 0\le x<4\\ 2 & x=4\\ -x+7 & 4<x\le 6\\ 1 & 6<x<8\end{cases}$

أ $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجودة

ب $f(4)$ موجودة

ج $\lim_{x\to 6} f(x)$ موجودة

د $\lim_{x\to 8^-} f(x)$ موجودة

هـ $f(x)$ مستمرةٌ عند $x=4$

13 أي مما يلي معادلة مماس الدالّة $f(x)=9-x^2$ عند $x=2$ ؟

أ $y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$

ب $y=-4x+13$

ج $y=-4x-3$

د $y=4x-3$

هـ $y=4x+13$

14 الدوال أدناه مُعرَّفة أيًّا تكن قيمة x باستثناء $x=0$. أي من هذه الدوال يُمكن تعريفها عند $x=0$ لكي تُصبح مستمرة عند $x=0$ ؟

أ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

ب $f(x)=\cos\frac{1}{x}$

ج $f(x)=\frac{x}{x^2}$

د $f(x)=\frac{\tan x}{x}$

هـ $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

15 $f(x)=\begin{cases}x^2+a & x<-1\\ x^3-8 & x\ge -1\end{cases}$

أي من قيم a أدناه تجعل الدالّة f مستمرة على $]-\infty, +\infty[$ ؟

أ $a=-1$

ب $a=-8$

ج $a=9$

د $a=-10$

هـ لا قيمة لِـ a تحقّق ذلك

الفصل

3

المشتقة Derivative

الفصل الثالث

الدروس

تُبيّن الصورة جزيء مادة الباراسيتامول Paracetamol التي تُستعمل لتخفيف الألم. وهي تفيد عندما تؤخذ بالكمّيات المسموحة، وتصبح ذات آثار ضارة قد تصل إلى حدود التسمُّم إذا لم تحترم مقادير استعمالها. وقد كشفت إحدى الدراسات أن 30% فقط من الأهل يحترمون هذه المقادير.

تُشكِّل الدالّة $D(t)=\frac{750t}{t+12}$ نموذجًا لحساب الكمية (بالمليغرام) المسموحة للأطفال من عمر 6 سنوات إلى 12 سنة، حيث يرمز t إلى سن الطفل بالسنوات.

هل أنت مستعد؟

المُفْرَدات

1 اربط كل عبارة في العمود الأيمن بتفسيرها في العمود الأيسر.

1. ميل المستقيم
2. دالة مستمرة
3. انقطاع قابل للإلغاء
4. محاذٍ عمودي
5. $\lim_{x \to c} f(x) = L$

أ مستقيم عمودي تقترب منه النقطة $(x, f(x))$ على بيان الدالّة f عندما تقترب قيمة x من c.

ب نسبة التقدُّم العمودي للمستقيم إلى التقدُّم الأفقي.

ج عدد L يقترب منه $f(x)$ عندما يقترب x من c.

د دالّة يُمكن رسم بيانها على ورقة بواسطة قلم دون الحاجة إلى رفعه.

هـ دالّة لا يتضمّن بيانها انقطاعًا.

و هو نقطة انقطاع للدالّة يُمكن إلغاؤه بإعادة تعريف الدالّة.

وجود النهايات

في التمارين من 2 إلى 7، استعمل الدالّة f العائدة إلى البيان المقابل. اذكر إن كانت النهاية موجودة أم لا.

2 $\lim_{x \to d} f(x)$ **3** $\lim_{x \to c^+} f(x)$ **4** $\lim_{x \to c^-} f(x)$

5 $\lim_{x \to c} f(x)$ **6** $\lim_{x \to b} f(x)$ **7** $\lim_{x \to a} f(x)$

الدوال المستمرة

في التمارين من 8 إلى 11، استعمل الدالّة f العائدة إلى البيان أعلاه. اذكر إن كانت هذه الدالّة مستمرة عند النقطة أم لا.

8 $x = a$ **9** $x = b$ **10** $x = c$ **11** $x = d$

إيجاد النهايات

في التمارين من 12 إلى 14، جِد النهاية.

12 $\lim_{x \to -4} \sqrt{1 - 2x}$ **13** $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 5}$ **14** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{4x}$

معادلة المستقيم

في التمرينين 15 و 16، جِد ميل المستقيم المار في النقطتين.

15 $(-2, 3)$ ؛ $(2, -1)$ **16** $(1, -3)$ ؛ $(-2, -1)$

في التمرينين 17 و 18، جِد معادلة المستقيم ذي الميل المُعيّن والمار في النقطة المعيّنة.

17 $(1, 2)$ ؛ $-\frac{2}{3}$ **18** $(-2, -5)$؛ $\frac{5}{4}$

1–3 الاشتقاق ومسألة المماس

Derivative and the Tangent Problem

اسحاق نيوتن 1642–1727

بالإضافة إلى اشتغاله في تطوير حساب التفاضل والتكامل، قدم اسحاق نيوتن (1642 -1727) مساهمات ثورية في الفيزياء بما فيها قانون التجاذب الكوني والقوانين الثلاثة للحركة.

الأهداف

- يجد ميل مماس بيان الدالّة عند نقطة من نقاطه.
- يستعمل تعريف النهاية لإيجاد مشتقة دالّة.
- يدرك العلاقة بين استمرار دالّة وقابليتها للاشتقاق.

المفردات Vocabulary

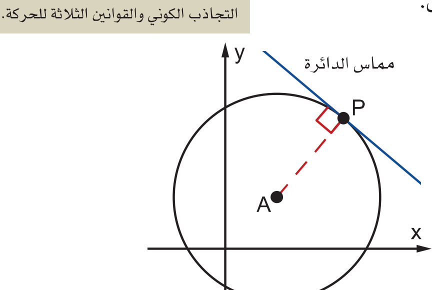
نسبة الفرقين	Difference quotient
قاطع	Secant
مماس	Tangent
ميل	Slope
اشتقاقية أو قابلة للاشتقاق	Differentiable
مشتقة	Derivative

مسألة المماس

تطوّر حساب التفاضل والتكامل عبر دراسة أربع مسائل رئيسية اهتمّ بها علماء الرياضيات الأوروبيون خلال القرن السابع عشر، هي:

1. مسألة المماس.
2. مسألة السرعة والتسارع.
3. مسألة القيم الكبرى والقيم الصغرى.
4. مسألة المساحة.

تتضمّن كل مسألة من هذه المسائل مفهوم النهاية. ويُمكن الدخول إلى حساب التفاضل والتكامل عبر أي منها.

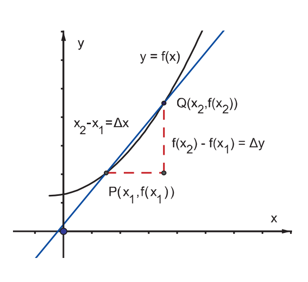


استكشاف

تمييز المماس: ارسم بيان الدالة $f(x)=2x^3-4x^2+3x-5$. ارسم في المستوى الإحداثي نفسه المستقيمات $y=x-5$ وَ $y=2x-5$ وَ $y=3x-5$. أي من هذه المستقيمات، إن وجد، يبدو أنه مماس لبيان الدالّة عند النقطة $(0,-5)$ أوضح وجهة نظرك.

سبق أن ناقشنا مسألة المماس في الفصل السابق، وتوصّلنا إلى أن هذه المسألة تعود إلى إيجاد ميل المماس. لإيجاد مماس دالة f عند نقطة P من بيانها، يُمكنك حساب قيمة تقريبية لميل هذا المماس باستعمال مستقيم يمر في نقطة التماس P ونقطة أخرى على بيان الدالّة، كما يُبيّن ذلك الرسم المقابل. يُسمى مثل هذا المستقيم **قاطعًا** لبيان الدالّة. إذا كانت $P((x_1\,,\,f(x_1))$ نقطة التماس وَ $Q((x_2\,,\,f(x_2))$ النقطة الأخرى على البيان، فإن ميل المستقيم الذي يمر بهاتين النقطتين هو:

$$m_{sec}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{حيث} \quad \Delta y=f(x_2)-(x_1) \text{ وَ } \Delta x=x_2-x_1$$



القاطع المار في النقطتين P وَ Q

تُسمى النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ **نسبة الفرقين**. يُعبّر Δx عن التغيّر في قيمة x بينما يُعبّر Δy عن التغيّر في قيمة y الناتج عن تغيّر قيمة x. بوسعك استعمال هذه النسبة للحصول على قيمة تقريبية لميل المماس. وتزداد دقة هذه القيمة التقريبية كلما قرّبت النقطة Q من النقطة P.

تعريف ميل الدالّة عند $x=c$

إذا كانت f دالّة والنهاية التالية موجودة

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=m$$

فإن مماس بيان الدالّة عند $P(c,f(c))$ هو المستقيم الذي ميله m ويمر في P.

يُسمى ميل المماس لبيان الدالّة عند النقطة $P(c,f(c))$ **ميل الدالّة عند** $x=c$.

مثـــال 1 ميل دالّة خطّية

جِد ميل الدالّة الخطّية $f(x)=2x-3$ عند $x=2$.

لتجد ميل الدالّة عند $x=2$، يُمكنك استعمال تعريف هذا الميل.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(2+\Delta x)-3]-[2(2)-3]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+2\Delta x-3-4+3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$$=2$$

إذن، ميل الدالّة $f(x)=2x-3$ عند $x=2$ هو $m=2$.

نقطة مراقبة

1. جد ميل الدالّة الخطّية $f(x)=-3x-5$ عند $x=-3$.

بما أن بيان الدالّة الخطّية مستقيم، فإن ميل الدالّة الخطّية عند أي نقطة من نقاط بيانها هو نفسه. إلا أن هذا الأمر مختلف عندما لا تكون الدالّة خطية.

مثـــال 2 ميل دالّة غير خطّية

جِد ميل الدالّة التربيعيّة $f(x)=x^2+1$ عند $x=c$ ثم عند $x=0$ وعند $x=-1$.

إذا كانت $(c,f(c))$ نقطة على بيان الدالّة f، فإن ميل المماس عند هذه النقطة هو:

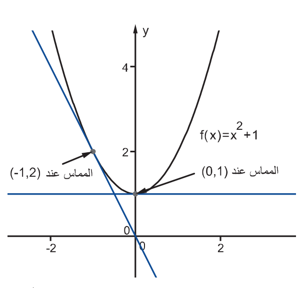
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(c+\Delta x)^2+1\right]-\left[c^2+1\right]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c^2+2c\Delta x+(\Delta x)^2+1-c^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2c\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2c+\Delta x)$$

$$=2c$$



ميل f عند $x=c$ هو $m=2c$

وهكذا، فإن ميل الدالّة f عند $x=c$ هو $m=2c$ أيًّا تكن النقطة $(c, f(c))$ على بيان الدالّة.
ينتج من ذلك أن الميل عند $x=0$ هو $m=2(0)=0$ ، وعند $x=-1$ هو $m=2(-1)=-2$.



2. جِد ميل الدالّة التربيعية $f(x)=-2x^2-3$ عند $x=1$ وَ $x=-1$.

لا يشمل التعريف السابق لميل الدالّة عند نقطة من بيانها إمكانية أن يكون المماس، عند هذه النقطة، عموديًا. يُمكنك في هذه الحالة أن تعتمد التعريف التالي: إذا كانت الدالّة مستمرة عند $x=c$ وكانت

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=+\infty$$

أو

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=-\infty$$

فإن المستقيم العمودي $x=c$ **مماس عمودي** للدالّة عند النقطة $(c, f(c))$ ، ويكون ميل الدالّة عند هذه النقطة غير مُعرَّف.
يُبيِّن الشكل المقابل دالّة لها مماس عمودي عند $x=-1$.

تعريف الاشتقاق

يُقال عن دالّة f أنها **تقبل الاشتقاق** عند $x=c$ إذا كان ميلها مُعرّفًا عند هذه النقطة.
يُمكننا الآن تعريف مشتقة الدالّة.
إذا كانت f دالّة تقبل الاشتقاق عند كل نقطة في مجالها، فإنك تستطيع أن تُقرن كل قيمة في c مجال الدالّة بميلها عند $x=c$. تُكتب هذه الدالّة f' وتُسمى **مشتقة** الدالّة f.
إذن:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

يستعمل العاملون في حقل الرياضات كتابات متعدِّدة للدلالة على قيمة المشتقّة f' . هذه الكتابات هي:

$$D_x(y)\ ،\ \frac{d}{dx}\big(f(x)\big)\ ،\ \frac{dy}{dx}\ ،\ \frac{df}{dx}\ ،\ f'(x)$$

مثـــال 3 إيجاد مشتقة دالّة باستعمال التعريف

جِد مشتقة الدالّة $f(x)=\frac{2}{x}$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2}{x+\Delta x}-\frac{2}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2x-2(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{\Delta x(x)(x+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{x(x+\Delta x)}=\frac{-2}{x^2}$$



3. جِد مشتقة الدالّة $f(x)=x^3$.

الاستمرارية وقابلية الاشتقاق

رأينا أن ميل الدالّة عند $x=c$ هو نهاية ميل القاطع الذي يمر في النقطة $P(c,f(c))$ ونقطة قريبة منها $Q(x,f(x))$ عندما تسعى Q إلى P . يسمح لنا ذلك بأن نكتب $f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ شرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

GRADE12-CHAPTER 3 2013-final 2/12/15 2:08 PM Page 6

إذا لم تكن الدالّة f مستمرة عند النقطة $(c, f(c))$ فهي لا تقبل الاشتقاق عند هذه النقطة.
يُبيّن الشكل المقابل بيان الدالّة $f(x)=[x]$ التي تقرن كل عدد حقيقي x بأكبر عدد صحيح لا يزيد عليه.
من الواضح أن هذه الدالّة منقطعة عند $x=0$. وهي لا تقبل الاشتقاق عند هذه النقطة لأن

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0$$

وَ

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-1-0}{x-0}=-\infty$$

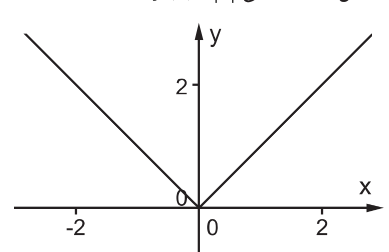
وبالتالي فإن النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ غير موجودة.

لا تقبل الدالّة $f(x)=[x]$ الاشتقاق عند النقطة $(0,f(0))$ لأنها منقطعة عند هذه النقطة.

مبرهنة 3–1 **قابلية الاشتقاق تفرض الاستمرار**

إذا كانت الدالّة f تقبل الاشتقاق عند النقطة $(c, f(c))$ ، فإنها حتمًا مستمرة عند هذه النقطة.

هل معكوس المبرهنة أعلاه صحيح؟ أي هل يفرض استمرار دالّة عند نقطة من بيانها أن تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة؟ الجواب هو لا كما يُبيّن ذلك مثال دالّة المطلق $f(x)=|x|$:



$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x-0}=-1$$

وَ

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x-0}=1$$

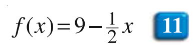
مما يُثبت أن النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ غير موجودة،
وبالتالي لا ميل للدالّة عند $x=0$.

3–1 التمارين

جِد في التمارين من 1 إلى 3 ميل الدالّة عند النقطة المحدَّدة.

1. $f(x)=3-2x$ ، $(-1,5)$
2. $f(x)=x^2-4$ ، $(1,-3)$
3. $f(t)=3t-t^2$ ، $(0,0)$

في التمارين من 4 إلى 11 جِد مشتقة الدالّة باستعمال النهايات.

4. $f(x)=3$
5. $f(x)=3x+2$
6. $f(x)=2x^2+x-1$
7. $f(x)=x^3+x^2$
8. $f(x)=\frac{1}{x-1}$
9. $f(x)=\sqrt{x+1}$
10. $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}$
11.  $f(x)=9-\frac{1}{2}x$

في التمارين من 12 إلى 15 جِد معادلة مماس الدالّة عند النقطة المحدَّدة.

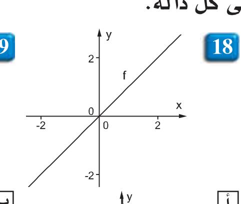
12. $f(x)=x^2+1$ ؛ $(2,5)$
13. $f(x)=x^3$ ؛ $(2,8)$
14. $f(x)=\sqrt{x-1}$ ؛ $(5,2)$
15. $f(x)=x+\frac{4}{x}$ ؛ $(4,5)$

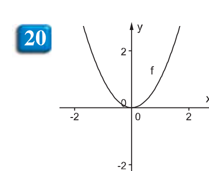
في التمرينين 16 وَ 17، جِد معادلة مماس الدالّة الموازي للمستقيم المحدّد بمعادلته.

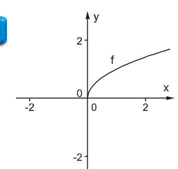
16 $3x-y+1=0$ ؛ $f(x)=x^3+2$

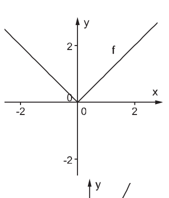
17 $x+2y-6=0$ ؛ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

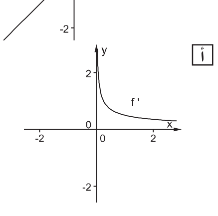
في التمارين من 18 إلى 21 . رُسمت بيانات 4 دوال وبيانات مشتقاتها. حدّد بيان المشتقة العائد إلى كل دالّة.

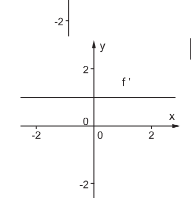
18


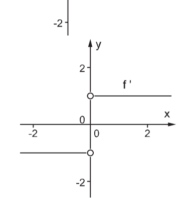
19


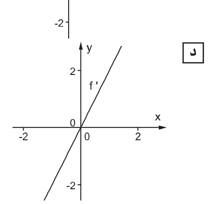
20


21


أ


ب


ج


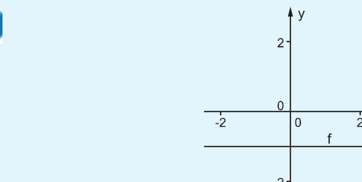
د


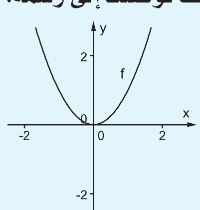
22 يمر مماس الدالّة g عند النقطة $(5,2)$ في النقطة $(9,0)$. جِد $g(5)$ وَ $g'(5)$.

23 يمر مماس الدالّة h عند النقطة $(-1,4)$ في النقطة $(3,6)$. جِد $h(-1)$ وَ $h'(-1)$.

حول المفاهيم

في التمرينين 24 وَ 25. ارسم بيان مشتقة الدالّة، واشرح كيف توصّلت إلى رسمه.

24


25


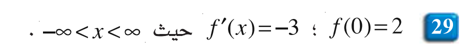
26 ارسم دالّة بحيث تكون جميع قيم مشتقّتها غير موجبة.

في التمرينين 27 وَ 28، تُمثّل النهاية المكتوبة $f'(c)$. جِد $f(x)$ وَ c .

27 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[5-3(1+\Delta x)]-2}{\Delta x}$

28 $\lim_{x\to 6}\frac{-(6+\Delta x)^2+36}{\Delta x}$

في التمرينين 29 وَ 30، جِد الدالّة f التي تحقّق الشروط المحدَّدة، ثم ارسم بيانها.



29 $f(0)=2$ ؛ $f'(x)=-3$ حيث $-\infty<x<\infty$.

30 $f(0)=4$ ؛ $f'(0)=0$ ؛ $f'(x)<0$ حيث $x<0$ ؛ $f'(x)>0$ حيث $x>0$.

31 جِد معادلتَي مماسَّي الدالّة في الشكل المقابل.

32 افترض أن $f'(c)=3$. جِد $f'(-c)$:

أ إذا كانت الدالّة f فردية.

ب إذا كانت الدالّة f زوجية.

33 يُبيّن الرسم المقابل بيان المشتقة g' لدالّة g .

أ جِد $g'(0)$.

ب جِد $g'(3)$.

ج ماذا تستنتج حول بيان الدالّة g إذا عرفت أن $g'(1)=-\frac{8}{3}$؟

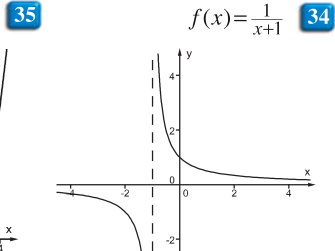
د ماذا تستنتج حول بيان الدالّة g إذا عرفت أن $g'(-4)=\frac{7}{3}$؟

هـ هل $g(6)-g(4)$ موجب أم سالب؟ وضّح ذلك.

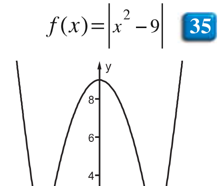
و هل يمكنك إيجاد $g(2)$؟ وضّح ذلك.

في التمارين من 34 إلى 36، حدّد قيم x حيث الدالّة تقبل الاشتقاق.

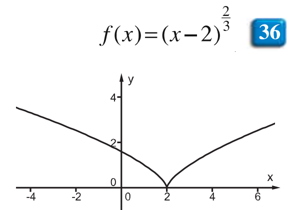
34 $f(x)=\frac{1}{x+1}$



35 $f(x)=\left|x^2-9\right|$



36 $f(x)=(x-2)^{\frac{2}{3}}$



في التمارين من 37 إلى 40 اذكر إن كانت المقولة صوابًا فعلّله، أو خطأ فأثبته بمثال مضاد .

37 ميل مماس دالّة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $(2,f(2))$ هو $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$.

38 إذا كانت دالّة مستمرة عند نقطة، فإنها تقبل الاشتقاق عند هذه النقطة.

39 إذا كانت دالّة تقبل الاشتقاق عند نقطة، فإنها مستمرة عند هذه النقطة.

40 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ وَ $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. بيّن أن f مستمرة ولا تقبل الاشتقاق عند $x=0$ ، في حين أن g تقبل الاشتقاق عند هذه النقطة. جِد $g'(0)$.

2-3 قواعد الاشتقاق
Differentiation Rules

الأهداف

- يعرف مشتقات الدوال الأساسية ويستعملها.
- يذكر قواعد الاشتقاق ويستعملها.

مشتقّات الدوال الأساسية

تعلّمت في الدرس السابق ما هي المشتقّة واستعملت النهايات لإيجاد مشتقّات بعض الدوال البسيطة. لكن هذه الطريقة غير عمليَّة بخصوص أكثرية الدوال. لذا لجأ العاملون في حقل الرياضيات إلى استخراج قواعد لإيجاد المشتقّات. تستند هذه الطريقة إلى كون أكثرية الدوال تنتج من الدوال الأساسية بالجمع والطرح والضرب والقسمة والتركيب. وبناءً على ذلك فإن معرفة مشتقات الدوال الأساسية والقواعد التي تحكم الاشتقاق تساعد على إيجاد مشتقات أكثرية الدوال.

يلخّص الجدول أدناه مشتقات الدوال الأساسية.

جدول المشتقّات للدوال الأساسية

الدالّة	المشتقّة
$f(x)=c$ ، حيث c عدد حقيقي	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^n$ ، حيث $n\in\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$ ؛ $x\neq 0$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$

مثال 1 استعمال المشتقّات الأساسية

أكمل الجدول

الدالّة	المشتقّة
$f(x)=x^5$	
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	
$f(x)=\frac{1}{x^3}$	

الحـل

المشتقّة	الدالّة
$f'(x)=5x^4$	$f(x)=x^5$
$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$f(x)=\sqrt[3]{x}$
$f'(x)=\left(x^{-3}\right)'=-3x^{-4}=\frac{-3}{x^4}$	$f(x)=\frac{1}{x^3}$



1 أكمل الجدول .

المشتقّة	الدالّة
	$f(x)=x^{16}$
	$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$
	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

قواعد الاشتقاق

مبرهنة 3-2 قاعدة الضرب في ثابت

إذا كانت الدالّة f تقبل الاشتقاق وَ c عددًا حقيقيًّا، فإن الدالّة cf تقبل الاشتقاق وَ:

$$[cf(x)]'=cf'(x)$$

مبرهنة 3-3 قاعدة المجموع والفرق

مجموع (أو فرق) دالّتين تقبلان الاشتقاق هو دالّة تقبل الاشتقاق وَ:

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x) \qquad [f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$$

بوسعنا الآن أن نجد صيغة عامّة لمشتقّة دالّة حدودية. يُشكّل إثبات المبرهنة التالية مثالاً على كيفية استعمال المشتقّات الأساسية وقواعد الاشتقاق لإيجاد مشتقة دالّة.

مبرهنة 3-4 مشتقة الدالّة الحدودية

إذا كانت

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

فإن

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+...+2a_2x+a_1$$

البرهان

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

$$f'(x)=\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\right)'$$

$$=\left(a_nx^n\right)'+\left(a_{n-1}x^{n-1}\right)'+...+\left(a_1x\right)'+\left(a_0\right)'$$ قاعدة المجموع

$$=a_n\left(x^n\right)'+a_{n-1}\left(x^{n-1}\right)'+...+a_1\left(x\right)'+\left(a_0\right)'$$ قاعدة الضرب في ثابت

$$=a_n(nx^{n-1})+a_{n-1}\left((n-1)x^{n-2}\right)+...+a_1(1)+0$$ المشتقات الأساسية

$$=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+...+2a_2x+a_1$$ تبسيط

مثـــال 2 استعمال الأقواس في الاشتقاق

أكمل الجدول:

الدالّة الأصليّة	الكتابة المعدلة	المشتقّة	المشتقّة مبسطة
$f(x)=\frac{5}{2x^3}$			
$f(x)=\frac{5}{(2x)^3}$			
$f(x)=\frac{7}{3x^{-2}}$			
$f(x)=\frac{7}{(3x)^{-2}}$			
$f(x)=\frac{4}{x\sqrt{x}}$			

الحل

الدالّة الأصليّة	الكتابة المعدلة	المشتقّة	المشتقّة مبسطة
$f(x)=\frac{5}{2x^3}$	$f(x)=\frac{5}{2}\left(x^{-3}\right)$	$f'(x)=\frac{5}{2}\left(-3x^{-4}\right)$	$f'(x)=\frac{-15}{2x^4}$
$f(x)=\frac{5}{(2x)^3}$	$f(x)=\frac{5}{8}\left(x^{-3}\right)$	$f'(x)=\frac{5}{8}\left(-3x^{-4}\right)$	$f'(x)=\frac{-15}{8x^4}$
$f(x)=\frac{7}{3x^{-2}}$	$f(x)=\frac{7}{3}\left(x^2\right)$	$f'(x)=\frac{7}{3}(2x)$	$f'(x)=\frac{14}{3}x$
$f(x)=\frac{7}{(3x)^{-2}}$	$f(x)=63\left(x^2\right)$	$f'(x)=63(2x)$	$f'(x)=126x$
$f(x)=\frac{4}{x\sqrt{x}}$	$f(x)=4\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$	$f'(x)=4\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^{-\frac{3}{2}-1}\right)$	$f'(x)=-6\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)=\frac{-6}{x^2\sqrt{x}}$

نقطة مراقبة .2 أكمل الجدول:

المشتقّة مبسَّطة	المشتقّة	الكتابة المعدلة	الدالّة الأصليّة
			$f(x)=\frac{-2}{3x^5}$
			$f(x)=\frac{-5}{(3x)^2}$
			$f(x)=\frac{9}{5x^{-3}}$
			$f(x)=\frac{7}{(2x)^{-5}}$

مثـــال 3 استعمال قواعد الاشتقاق والمشتقّات الأساسية

أكمل الجدول:

المشتقّة	الدالّة
	$f(x)=x^3-4x+5$
	$f(x)=-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x$
	$f(x)=\frac{\sin x}{2}$
	$f(x)=x+\cos x$

الحـل

المشتقّة	الدالّة
$f'(x)=\left(x^3-4x+5\right)'=\left(x^3\right)'-(4x)'+(5)'=3x^2-4$	$f(x)=x^3-4x+5$
$f'(x)=\left(-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x\right)'=\left(-\frac{x^4}{2}\right)'+\left(3x^3\right)'-(2x)'$ $=-2x^3+9x^2-2$	$f(x)=-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x$
$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{2}\right)'=\left(\frac{1}{2}\sin x\right)'=\frac{1}{2}\cos x$	$f(x)=\frac{\sin x}{2}$
$f'(x)=(x+\cos x)'=(x)'+(\cos x)'=1-\sin x$	$f(x)=x+\cos x$

نقطة مراقبة .3 أكمل الجدول:

المشتقة	الدالة
	$f(x)=-2x^5+3x^3+5x^2$
	$f(x)=-\frac{x^5}{5}-7x^3+8$
	$f(x)=\frac{\tan x}{2}-\frac{1}{2}\sin x$
	$f(x)=\frac{1}{2}x-\cos x$

قواعد الاشتقاق

مبرهنة 3-5 قاعدة ناتج الضرب

ناتج ضرب دالّتين تقبلان الاشتقاق هو دالّة تقبل الاشتقاق وَ :

$$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

مبرهنة 3-6 قاعدة ناتج القسمة

إذا كانت f وَ g دالّتين تقبلان الاشتقاق، فإن الدالّة $\frac{f}{g}$ تقبل الاشتقاق حيث $g(x)\neq 0$ وَ :

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مثـــال 4 استعمال قواعد الاشتقاق والمشتقّات الأساسية

جِد مشتقة الدالّة.

1. $f(x)=3x^2\sin x$
2. $f(x)=\frac{5x-2}{x^2+1}$

الحل

1.
$$f'(x)=\left[3x^2\sin x\right]' = 3x^2[\sin x]' + \sin x\left[3x^2\right]'$$
$$= 3x^2\cos x+(\sin x)(6x) = 3x^2\cos x+6x\sin x$$

2.
$$f'(x)=\left(\frac{5x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)(5x-2)'-(5x-2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{(x^2+1)(5)-(5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$$

نقطة مراقبة

4. جِد مشتقة الدالّة.

1. $f(x)=-2x^3\cos x$
2. $f(x)=\frac{3x-7}{x^2-1}$

مثـــال 5 استعمال قواعد الاشتقاق والمشتقّات الأساسية

برهن قاعدة مشتقّة الدالّة $f(x)=\tan x$.

الحل

$$f'(x)=[\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\cos)[\sin x]'-(\sin x)[\cos x]'}{(\cos x)^2}$$
$$=\frac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$




نقطة مراقبة

5. جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=\frac{1}{\tan x}$.

مبرهنة 7-3 قاعدة الدالة المركَّبة

إذا كانت f دالّة بدلالة u تقبل الاشتقاق وكانت $u=g(x)$ دالّة بدلالة x تقبل الاشتقاق، فإن الدالّة $y=f(g(x))$ تقبل الاشتقاق وَ :

$$\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))g'(x)$$

البرهان

$$\left(f(g(x))\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{x_2-x_1}$$

حيث $x_1=x$ وَ $x_2=x_1+h$

$$=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\cdot\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\lim_{x_2\to x_1}\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

بما أن الدالّة g مستمرة فإن $g(x_2)$ يسعى إلى $g(x_1)$ عندما يسعى x_2 إلى x_1

$$=\lim_{g(x_2)\to g(x_1)}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\lim_{x_2\to x_1}\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=f'(g(x))g'(x)$$

قد تواجهك صعوبات في تحديد الدوالّ التي تتركّب منها الدالّة المركَّبة. يوضح المثال التالي بعض الأمثلة.

مثال 6 استعمال قواعد الاشتقاق والمشتقّات الأساسية

أكمل الجدول :

		$y=f(g(x))$
		$y=\frac{1}{x+1}$
		$y=\sin 2x$
		$y=\sqrt{3x^2-x+1}$
		$y=\tan^2 x$

الحل

$y=f(u)$	$u=g(x)$	$y=f(g(x))$
$y=\frac{1}{u}$	$u=x+1$	$y=\frac{1}{x+1}$
$y=\sin u$	$u=2x$	$y=\sin 2x$
$y=\sqrt{u}$	$u=3x^2-x+1$	$y=\sqrt{3x^2-x+1}$
$y=u^2$	$u=\tan x$	$y=\tan^2 x$

نقطة مراقبة **6** أكمل الجدول :

$y=f(u)$	$u=g(x)$	$y=f(g(x))$
		$y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$
		$y=\cos \pi x$
		$y=\sqrt{4x^5-5x^4}$
		$y=(1+\tan x)^2$

لحساب مشتقة الدالة التي تُكتب على الصورة $f(x)=(u(x))^n$ ، لاحظ $f(u)=u^n$ حيث u دالة بدلالة x طبّق قاعدة مشتقة الدالة المُركّبة لتحصل على $f'(x)=u'(x)f'(u)=nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

مثــــال 7 مشتقة الدالّة المركّبة

جِد مشتقّة الدالّة $y=(x^2+1)^3$.

الحل

استنادًا إلى المثال أعلاه يُمكنك أن تكتب هذه الدالّة بالتركيب كما يلي:

$$y=u^3 \qquad u=x^2+1$$

وَينتج من ذلك:

$$y'(x)=y'(u)u'(x)=(3u^2)(2x)=3(x^2+1)^2(2x)=6x(x^2+1)^2$$



7 جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

2–3 التمارين

في التمارين من 1 إلى 11. جِد مشتقّة الدالّة.

1. $y=8$
2. $f(x)=x^6$
3. $f(x)=\frac{1}{x^7}$
4. $f(x)=\sqrt[5]{x}$
5. $f(x)=3x-1$
6. $f(x)=-2x^2+3x-6$
7. $f(x)=2x^3-x^2+3x$
8. $f(\theta)=\frac{\pi}{2}\sin\theta-\cos\theta$
9. $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\cos x$
10. $f(x)=\frac{1}{x}-3\sin x$
11. $f(x)=\frac{5}{(2x)^3}+2\cos x$

في التمارين من 12 إلى 15 ، أكمل الجدول.

	الدالّة الأصلية	الكتابة المعدّلة	المشتقّة	المشتقة مبسّطة
12	$f(x)=\frac{5}{2x^2}$			
13	$f(x)=\frac{\pi}{(3x)^2}$			
14	$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$			
15	$f(x)=\frac{4}{x^{-3}}$			

في التمارين من 16 إلى 25، جِد مشتقة الدالة.

16 $f(x)=x^2-5-3x^{-2}$ **17** $f(t)=t^2-\frac{4}{t^3}$ **18** $f(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$

19 $f(x)=x(x^2+1)$ **20** $f(x)=\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}$ **21** $f(t)=t^{\frac{4}{5}}-t^{\frac{2}{3}}$

22 $f(x)=(x^2+4)\sqrt{x}$ **23** $f(x)=x^3\cos x$ **24** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

25 $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$

في التمارين من 26 إلى 29 ، أكمل الجدول.

	$y=f(g(x))$	$u=g(x)$	$y=f(u)$
26	$y=(6x-5)^4$		
27	$y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$		
28	$y=3\tan(\pi x^2)$		
29	$y=\cos\frac{3x}{2}$		

في التمارين من 30 إلى 50 ، جِد مشتقّة الدالّة.

30 $f(x)=3(4-9x)^4$ **31** $f(t)=\sqrt{1-t}$ **32** $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

33 $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$ **34** $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ **35** $f(t)=\sqrt{\frac{1}{t^2-2}}$

36 $f(x)=\left(\frac{x+5}{x^2+2}\right)^2$ **37** $f(x)=\frac{3x^2-2}{2x+3}$ **38** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$

39 $f(x)=\ln x^2$ **40** $f(x)=x\ln x$ **41** $f(x)=\ln\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$

42 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ **43** $f(x)=\ln\frac{1}{x^2}$ **44** $f(x)=\ln\sqrt{2+\cos^2 x}$

45 $f(x)=e^{-x^2}$ **46** $f(x)=x^2e^{-x}$ **47** $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

48 $f(x)=\ln e^x$ **49** $f(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$ **50** $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$

في التمرينين 51 و 52 ، جِد معادلة مماس الدالّة عند النقطة المحدَّدة.

51 $f(x)=x^4-3x^2+2$ ؛ $(1,0)$

52 $f(x)=\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$ ؛ $(1, 2)$

في التمارين من 53 إلى 55 ، حدِّد النقاط (إن وجدت) التي يكون عندها مماس بيان الدالّة أفقيًا.

53 $f(x)=x^4-8x^2+2$ **54** $f(x)=\frac{1}{x^2}$

55 $f(x)=x+\sin x$ حيث $0\le x\le 2\pi$

في التمرينين 56 و 57 ، جِد قيمة k بحيث يكون المستقيم مماسًا للدالّة.

56 $f(x)=x^2-kx$ ؛ $y=4x-9$

57 $f(x)=\frac{k}{x}$ $y=-\frac{3}{4}x+3$

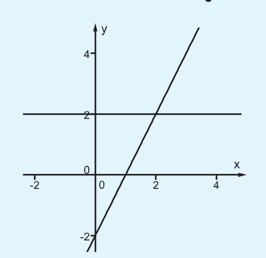
حول المفاهيم

في التمرينين 58 و 59 جِد العلاقة التي تربط بين مشتقّة f ومشتقّة g .

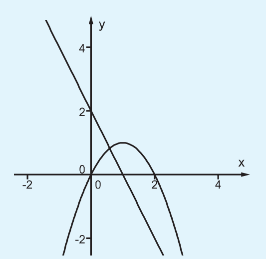
58 $g(x)=f(x)+6$ **59** $g(x)=-5f(x)$

في التمرينين 60 و 61. يُظهر الرسم بيان دالّة f وبيان مشتقّتها في المستوي الإحداثي نفسه. ميِّز بيان f وبيان f' ، وَاكتب أمام كل بيان اسمه. اشرح كيف توصّلت إلى تحديد بيان الدالّة وبيان مشتقّتها.

60



61



في التمرينين 62 و 63، استعمل المعطيات لكي تجد قيمة $f'(2)$.

$g(2)=3$ وَ $g'(2)=-2$ $h(2)=-1$ وَ $h'(2)=4$

62 $f(x)=2g(x)+h(x)$ **63** $f(x)=g(x)h(x)$

في التمارين من 64 إلى 69، اذكر إن كانت المقولة صوابًا فعلّله، أو خطأ، فأثبته بمثال مضاد.

64 إذا $f'(x)=g'(x)$ فإن $f(x)=g(x)$.

65 إذا كان $f(x)=g(x)+c$ فإن $f'(x)=g'(x)$.

66 إذا كان $y=\pi^2$ فإن $y'=2\pi$.

67 إذا كان $y=\frac{x}{\pi}$ فإن $y'=\frac{1}{\pi}$.

68 إذا كان $g(x)=3f(x)$ فإن $g'(x)=3f'(x)$.

69 إذا كان $f(x)=\frac{1}{x^n}$ فإن $f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$.

70 لديك دالّة حدودية $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. حدّد الشروط التي يجب أن تتحقّق في a وَ b وَ c وَ d لكي:

أ) لا يكون للدالّة مماسّ أفقي.

ب) يكون للدالّة مماسّ أفقي واحد.

ج) يكون للدالّة مماسّان أفقيان فقط.

أعطِ مثالاً على هذه الدالّة في كل حالة.

الفصل 3

اختبار جزئي

1-3 إيجاد المشتقّة باستعمال التعريف

1 استعمل النهايات لإيجاد مشتقّة كل دالّة.

أ $f(x)=2\sqrt{x}-1$ ب $f(x)=-x^2+x$

2-3 قواعد الاشتقاق

2 جِد مشتقّة كل دالّة.

أ $f(x)=2x^2-\frac{1}{2x^3}+\frac{2\sqrt{x}}{3}-1$ ب $f(x)=\frac{\cos 2x}{x^2}$

ج $f(x)=\ln(1+e^x)$ د $f(\theta)=\sin\left(\pi^2\theta\right)+\cos\left(\pi\theta^2\right)$

3 $f(x)=x^3-3x$

أ جِد معادلة مماسّ بيان الدالّة عند نقطة الأصل.

ب جِد نقاط بيان الدالّة حيث المماسّ أفقي.

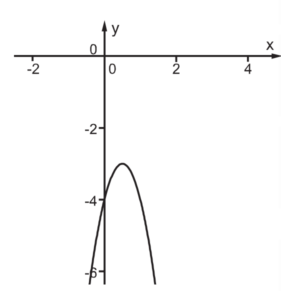
ج إذا كانت $g(x)$ دالّة تحقق $g(1)=0$ وَ $g'(1)=-1$ ، جِد قيمة $h'(1)$ حيث $h=f\circ g$.

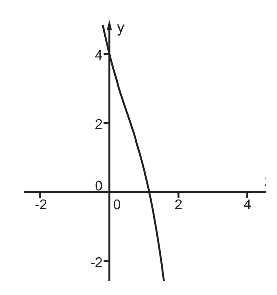
2-3 الاستمرارية

4 بيّن أن الدالّة $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 1\\ 3x-1 & x<1\end{cases}$ مستمرة ولا تقبل الاشتقاق عند $x=1$.

2-3 الدالّة ومشتقّتها

5 يمثّل الرسمان أدناه بيان دالّة f وبيان مشتقّتها f' .





أ أي من الرسمين بيان f ؟ وأي منهما بيان f' ؟ برِّر جوابك.

ب جِد معادلة مماسّ بيان f عند $x=0$.

3–3 الاشتقاق الضمني والمشتقّات العُليا

Implicit Differentiation and Higher-order Derivative

الأهداف

- يُميّز بين كتابة دالة على الصورة الضمنيّة وكتابتها على الصورة المعلنة.
- يستعمل الاشتقاق الضمني ليجد مشتقّة دالّة.
- يُميّز حالة عدم التعيين عند حساب نهاية.
- يستعمل مبرهنة لوبيتال لإيجاد النهاية في حالة عدم تعيين .

تعرّفت الدوال منذ الصف العاشر، ولاحظت أن تعريف الدالّة يتم عادة **بصورة معلنة** عن طريق كتابة المتغيّر التابع y بدلالة المتغيّر الحرّ x مثل: $y=3x^2-5$. غير أن بعض الدوال تتحدّد **بصورة ضمنية** بعلاقة يحققها المتغيّران مثل $xy=1$. فإذا طُلب إليك، في هذا المثال، أن تجد مشتقّة y كدالّة بدلالة x، فسوف تبدأ بكتابة المقدار y بدلالة x ، ثم تطبّق قواعد الاشتقاق.

$$xy=1 \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{x}=x^{-1} \;\Rightarrow\; y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

غير أن كتابة المقدار y بدلالة x ليس سهلاً دائمًا. مثال على ذلك العلاقة $x+y^3=\sqrt{x+y}$.
في مثل هذه الحالات، تلجأ إلى **الاشتقاق الضمني** لتجد y' .

لكي تفهم الاشتقاق الضمني، تذكّر أن الاشتقاق يتم بالنسبة إلى المتغيّر x .
لتجد y' ، قم بما يلي:

- جد مشتقة كل طرف بالنسبة إلى المتغيّر x.
- جمّع الحدود التي تتضمّن y' في طرف والحدود الأخرى في الطرف الآخر.
- حلّ الطرف الذي يحتوي على y' .
- احسب قيمة y' بدلالة x وَ y .

مثـــال 1 الاشتقاق الضمني

جِد y' حيث $y^2=x$

الحل

احسب، باستعمال قواعد الاشتقاق، مشتقة كل طرف من طرفي المعادلة بالنسبة إلى المتغيّر x
ثم استخلص قيمة y' .

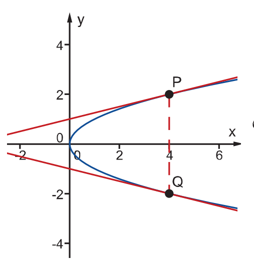
$$(y^2)'=(x)' \;\Rightarrow\; 2yy'=1 \;\Rightarrow\; y'=\frac{1}{2y}$$

المفردات Vocabulary

الصورة الضمنية	Implcit Form
الصورة المُعلنة	Explict form
الاشتقاق الضمني	Implicit differentiation
المشتقة الثانية	Second derivative
المشتقات العليا	High -Order derivative
حالة عدم التعيين	Indeterminate Form

نقطة مراقبة

1. جِد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y^3+y^2-5y-x^2=-4$.

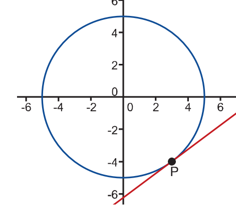


في المثال 1، يتضمّن المقدار الذي يساوي y' المتغيّرين x وَ y . هذا الأمر ليس مقبولاً فحسب، بل مفيد أيضًا. فهو مثلاً يبيّن أن للرسم البياني الذي يُمثل العلاقة $y^2=x$ ، وهو قطع مكافئ، مماسّين مختلفين عند $x=4$. الأول عند النقطة $(4,-2)$ وميله $y'=\frac{1}{2(-2)}=-\frac{1}{4}$ ؛ والثاني عند النقطة $(4, 2)$ وميله $y'=\frac{1}{2(2)}=\frac{1}{4}$.
غالبًا ما يؤدي الاشتقاق الضمني إلى الحصول على قيمة y' كمقدار يتضمّن x وَ y .

مثـــال 2

إيجاد ميل مماسّ الدائرة

جِد ميل مماسّ الدائرة $x^2+y^2=25$ عند النقطة $(3,-4)$.



الحل

ابدأ بإيجاد y' باستعمال الاشتقاق الضمني.

$$\left(x^2+y^2\right)'=(25)' \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{-2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

ثم احسب قيمة y' عندما $x=3$ وَ $y=-4$.

$$y'=-\frac{3}{(-4)}=\frac{3}{4}$$

ميل مماسّ الدائرة $x^2+y^2=25$ عند النقطة $(3,-4)$ هو $\frac{3}{4}$.



نقطة مراقبة 2. جِد ميل مماسّ الدائرة $x^2+y^2=16$ عند النقطة $(0,4)$.

لاحظ أن الاشتقاق الضمني، فضلاً عن أن إيجاده سهل، فهو يؤدي إلى كتابة y' على صورة مقدار يجعل حساب قيمته العددية سهلاً عند أي نقطة من نقاط الخط البياني.

مثـــال 3

مماسّ القطع الناقص وعموده

جِد ميل مماسّ القطع الناقص $x^2-xy+y^2=7$ وميل عموده، عند النقطة $(-1,2)$.

الحل

ابدأ بإيجاد y' باستعمال الاشتقاق الضمني.

$$\left(x^2-xy+y^2\right)'=(7)' \Rightarrow 2x-y-xy'+2yy'=0 \Rightarrow (2y-x)y'=y-2x \Rightarrow y'=\frac{y-2x}{2y-x}$$

ثم احسب قيمة y' عندما $x=-1$ وَ $y=2$.

$$y'=\frac{(2)-2(-1)}{2(2)-(-1)}=\frac{4}{5}$$

ميل المماسّ هو $\frac{4}{5}$ ، وميل العمود هو $-\frac{5}{4}$.



نقطة مراقبة 3. جِد ميل مماسّ القطع الناقص $4x^2-8xy+9y^2=16$ وميل عموده عند النقطة $(-2,0)$.

المشتقات العليا Higher-order Derivatives

إذا كانت f دالّة تقبل الاشتقاق، فإن مشتّقتها هي دالّة بدورها، وقد تكون قابلة للاشتقاق. إذا كانت المشتقّة f' دالّة قابلة للاشتقاق، فإن مشتقّتها تُسمّى **المشتقّة الثانية** للدالّة f ويُرمز إليها بالرمز f''. في هذه الحالة تُسمّى f' **المشتقّة الأولى**.

تشكّل المشتقّة الثانية مثالاً على **المشتقّات العليا**. يُمكنك أن تحسب مشتقة دالّة من أي رتبة تريد (شرط وجودها). فالمشتقّة الثالثة هي مشتقّة المشتقّة الثانية. المشتقات العليا للدالّة $y=f(x)$ هي:

المشتقّة الأولى	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$
المشتقّة الثانية	y''	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$
المشتقّة الثالثة	y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$
المشتقّة الرابعة	$y^{(4)}$	$f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$
⋮				
المشتقّة من الرتبة n	$y^{(n)}$	$f^{(n)}(x)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$

مثال 4 إيجاد مشتقّة من رتبة عليا

جِد المشتقّة الثالثة للدالّة $f(x)=x\sin x$.

الحل

المشتقة الأولى $f'(x)=(x\sin x)'=\sin x+x\cos x$

المشتقة الثانية $f''(x)=(\sin x+x\cos x)'=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$

المشتقة الثالثة $f'''(x)=(2\cos x-x\sin x)'=-2\sin x-\sin x-x\cos x=-3\sin x-x\cos x$

نقطة مراقبة 4. جِد المشتقّة الثالثة للدالّة $f(x)=x\cos x$.

عدم التعيين في نهاية دالّة

سبق أن واجهت، في حساب النهايات، حالات تظهر فيها النهاية على الصورة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$. تقول إنك في حالة من حالات **عدم التعيين**. حاولت في السابق أن ترفع عدم التعيين جبريًّا بإعادة كتابة الدالّة بحيث تتخلّص من عدم التعيين.

مثال 5 رفع عدم التعيين لحساب نهاية

جِد $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-\sqrt{x}}$.

الحل

من الواضح أن تطبيق قاعدة القسمة لحساب هذه النهاية، يقودنا إلى حالة عدم تعيين هي $\frac{0}{0}$. لكن يمكن إعادة كتابة الدالّة وحساب النهاية على الشكل التالي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x+\sqrt{x}\right)}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}=0$$

نقطة مراقبة 5. جد $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-2}{x+1}$.

لكن استعمال الجبر لرفع حالة عدم التعيين ليس متيسِّرًا في الكثير من الحالات، مثل $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. في هذه الحالة، نلجأ إلى استعمال **مبرهنة لوبيتال**.

مبرهنة 3-8 مبرهنة لوبيتال

f وَ g دالّتان تقبلان الاشتقاق مع $g'(x)\neq 0$ في جوار $x=c$. إذا كانت $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ في حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ ، فإن

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثـــال 6 استعمال مبرهنة لوبيتال

أ جِد $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

الحل

من الواضح أن تطبيق قاعدة ناتج القسمة يؤدّي إلى حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$. استعمل مبرهنة لوبيتال.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

ب جِد $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{2x^2+1}$

الحل

يؤدي تطبيق قاعدة ناتج القسمة إلى حالة عدم تعيين. استعمل مبرهنة لوبيتال:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+1}{2x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x^2-3x+1)'}{(2x^2+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x-3}{4x}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

استعمل مُبرهنة لوبيتال مرة جديدة:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+1}{2x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x-3}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(10x-3)'}{(4x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

نقطة مراقبة 6. جِد $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

هناك حالة أخرى من حالات عدم التعيين. إنها الحالة التي تؤدّي إلى الصورة $\frac{\infty}{\infty}$. في هذه الحالة أيضًا ، نطبِّق مبرهنة لوبيتال.

مثـــال 7 حالة $\frac{\infty}{\infty}$.

جِد $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$.

الحل

من الواضح أن تطبيق قاعدة ناتج القسمة يؤدّي إلى حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$ ، لأن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

استعمل مبرهنة لوبيتال.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

نقطة مراقبة 7. جِد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$.

قد تحتاج إلى تطبيق مبرهنة لوبيتال أكثر من مرة.

مثـــال 8 تطبيق مبرهنة لوبيتال أكثر من مرة

جِد $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}$.

الحل

من الواضح أن تطبيق قاعدة ناتج القسمة يؤدّي إلى حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}\right)=+\infty$

استعمل مبرهنة لوبيتال.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}\to\frac{\infty}{\infty}$$

استعمل مبرهنة لوبيتال مرة ثانية.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

نقطة مراقبة 8. جِد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

3–3 التمـاريـن

في التمارين من 1 إلى 4، جِد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x وَ y.

1. $x^2y+xy^2=6$
2. $y^2=\frac{x-1}{x+1}$
3. $x=\tan y$
4. $x+\tan(xy)=0$

في التمرينين 5 وَ 6، جِد y' وميل المنحنى عند النقطة المعيّنة.

5. $x^2+y^2=13$ ؛ $(-2,3)$
6. $(x+2)^2+(y+3)^2=25$ ؛ $(1,-7)$

في التمرينين 7 وَ 8، حدّد متى يكون ميل المنحنى مُعرّفًا.

7. $x^2y-xy^2=4$
8. $x^3-y^3=xy$

في التمارين من 9 إلى 12، جِد ميل المماسّ والعمود عند النقطة المعيَّنة.

9. $x^2+xy-y^2=1$ $(2,3)$
10. $x^2y^2=9$ $(-1,3)$
11. $6x^2+3xy+2y^2+17y-6=0$ $(-1,0)$
12. $y=2\sin(\pi x-y)$ $(1,0)$

في التمارين من 13 إلى 18، جِد المشتقّة الثانية للدالّة.

13. $f(x)=4x^{\frac{3}{2}}$
14. $f(x)=x+32x^{-1}$
15. $f(x)=\frac{x}{x-1}$
16. $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$
17. $f(x)=3\sin x$
18. $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

في التمارين من 19 إلى 22، جِد المشتقّة المطلوبة للدالّة المعطاة إحدى مشتقّاتها.

19 $f'(x)=x^2$ ؛ جِدْ $f''(x)$

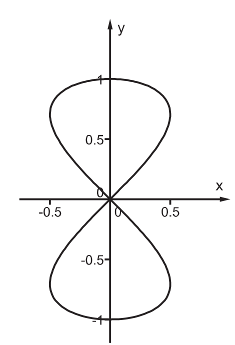
20 $f''(x)=2-\frac{2}{x}$ ؛ جِدْ $f'''(x)$

21 $f'''(x)=2\sqrt{x}$ ؛ جِدْ $f^{(4)}(x)$

22 $f^{(4)}(x)=2x+1$ ؛ جِدْ $f^{(6)}(x)$

23 **بيان الثمانية** يُمثّل المنحنى المقابل المعادلة $y^4=y^2-x^2$.

جد ميلَيْ هذا المنحنى عند النقطتين $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وَ $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right)$.



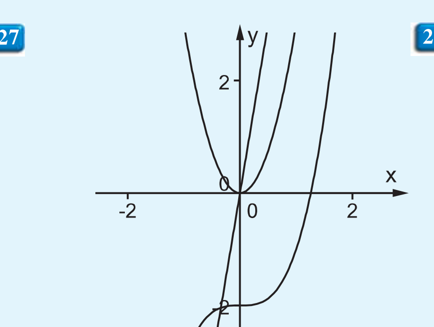
حول المفاهيم

24 وضِّح الفرق بين الصورة الضمنية والصورة المعلنة في تعريف العلاقة بين x وَ y. أعطِ مثالاً على كل منهما.

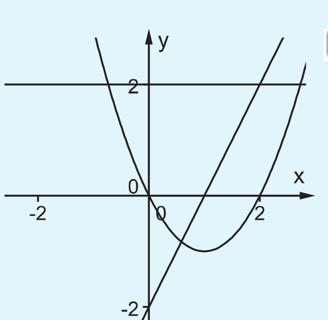
25 اكتب، بأسلوبك، شرحًا لخطوات الاشتقاق الضمني.

في التمرينين 26 وَ 27، يُبيّن الرسم بيان دالّة f وبيانَيْ مشتقّتها الأولى f' ومشتقّتها الثانية f'' . حدِّد أي من البيانات الثلاثة هو بيان الدالّة، وأي منها بيان مشتقّتها الأولى وأي هو بيان مشتقّتها الثانية. أوضح كيف وجدت كل بيان.

26



27



صواب أم خطأ؟ **في التمارين من 28 إلى 30، اذكر إن كانت المقولة صوابًا فعلِّله، أو خطأ، فأثبته بمثال مضاد.**

28 إذا كان $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ فإن $\frac{d^5y}{dx^5}=0$.

29 إذا كانت f دالّة حدودية من الدرجة n فإن $f^{(n+1)}(x)=0$.

30 تُمثّل المشتقّة الثانية لدالّة، معدّل التغيّر لمشتقّتها الأولى.

31 جدِ المشتقّة الأولى للدالّة $f(x)=x|x|$. هل $f''(0)$ مُعرّفة؟

32 **فكّر** f وَ g دالّتان تقبلان الاشتقاق، وكذلك مشتقّتاهما، عند كل قيمة من قيم x. أيٌّ مما يلي صواب؟

أ $fg'' - f''g = (fg' - f'g)$

ب $fg'' + f''g = (fg)''$

في التمارين من 33 إلى 35، جِد النهاية بإعادة كتابة الدالّة أوّلاً ثم باستعمال مبرهنة لوبيتال.

33 $\lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{x^2-9}$ **34** $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x+1}$ **35** $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

في التمارين من 36 إلى 44، جِد النهاية.

36 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$ **37** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}$ **38** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1-x)}{x}$

39 $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x^2-1}$ **40** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ **41** $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x^2+3}$

42 $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **43** $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$ **44** $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^4}{x^3}$

حول المفاهيم

45 إذا كان L مماسًّا للمنحنى $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$ ، بيّن أن مجموع تقاطعَي هذا المستقيم L مع محورَي الإحداثيات يساوي c .

46 استعمل الاشتقاق الضمني لتبيّن أن مشتقّة الدالّة $f(x)=x^{\frac{p}{q}}$، حيث p وَ q عددان صحيحان وَ $q\neq 0$ هي $f'(x)=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$

47 دالّة السرعة لجسم متحرِّك هي $v(t)=36-t^2$ مترًا في الثانية حيث $0\leq t\leq 6$. جِد سرعة هذا الجسم وتسارعه عند $t=3$. ماذا تقول عن سرعة هذا الجسم عندما تكون السرعة والتسارع متعاكسين في الإشارة؟

48 تعرف أن المستقيم المتعامد مع مماسّ الدائرة عند نقطة التماس يمر في مركز الدائرة. سوف تثبت هذا الأمر. استعمل الدائرة $x^2+y^2=r^2$ والنقطة $P(a,b)$ عليها.

أ اكتب معادلة مماسّ الدائرة عند النقطة P .

ب جِد معادلة المستقيم المتعامد مع المماسّ عند النقطة P، واستنتج أنه يمر في مركز الدائرة.

4-3 معدّلات التغيُّر
Rates of Change

الأهداف
- يستعمل الاشتقاق لإيجاد معدلات التغيّر.
- يستعمل معدلات التغيّر لحل مسائل من الواقع.

المفردات Vocabulary
دالّة الموقع Position function
السرعة المتجهة Velocity
مقدار السرعة Speed
السرعة الوسطية Average velocity
السرعة اللحظية Instantaneous velocity
معدّل التغيّر Rate of change

معدّلات التغيُّر

تعلّمت كيف تستعمل الاشتقاق لإيجاد ميل دالّة عند نقطة من نقاط بيانها. سوف تتعلّم في هذا الدرس كيف تستعمل الاشتقاق لإيجاد معدّل التغيّر لمتغيّر معيّن بالنسبة إلى متغيّر آخر. تُستعمل معدّلات التغيّر في مجالات كثيرة مثل دراسة تزايد السكان ومعدّلات الإنتاج ومعدّلات تدفّق المياه والسرعة والتسارع.

تشكّل دراسة حركة جسم يتحرّك على خط مستقيم (أفقي أو عمودي) أحد الموضوعات الشائعة في استعمالات معدل التغيّر. غالبًا ما يُستعمل محور أفقي مع نقطة أصل عليه كنموذج للمستقيم الذي يتحرّك عليه الجسم أفقيًّا.

في هذه الحالة، يُعتبر التحرّك في الاتِّجاه الموجب إذا جرى من اليسار إلى اليمين، وفي الاتجاه السالب إذا جرى من اليمين إلى اليسار.

دالّة الموقع (الازاحة Displacement) هي الدالّة s التي تحدِّد موقع الجسم من نقطة الأصل، بدلالة الزمن t. إذا قطع الجسم، خلال فترة Δt من الزمن مسافة $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ فإن النسبة

$$\frac{\text{التغيّر في الموقع}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

تُسمّى **السرعة الوسطية (المتوسطة) Average Velocity** للجسم المتحرِّك أو متوسِّط سرعته في الفترة $[t, t+\Delta t]$.

الحركة الأفقية

للمشتقّة دور مهم في دراسة حركة الأجسام. عندما يتحرَّك جسم فإن موقعه يتغيّر بتغيّر الزمن. إذا انطلقت بسيارتك من أربيل إلى دهوك، فإن موقعك يتحدَّد في كل لحظة وفق دالّة الموقع $s(t)$.

افترض أن الجسم يتحرّك على خط مستقيم موجّه بحيث يُمكن اعتباره محور الإحداثيات x.
يتحرّك الجسم، خلال الفترة من t إلى $t_1 = t + \Delta t$، من الموقع $s(t)$ إلى الموقع $s(t_1) = s(t+\Delta t)$.
ستكون السرعة الوسطية لهذا الجسم خلال الفترة $[t, t_1]$

$$v_{av} = \frac{\text{التغيّر في الموقع}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

حيث $\Delta(s) = s(t+\Delta t) - s(t)$.

إذا أردت أن تعرف سرعة الجسم عند اللحظة t، ابحث عن $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$، أي عن قيمة مشتقّة دالّة الموقع عند اللحظة t.

Instantaneous Velocity السرعة اللحظية

السرعة اللحظية لجسم متحرّك هي مشتقّة دالّة الموقع لحركة هذا الجسم. إنها، عند اللحظة t ،

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=s'(t)$$

مثـــــال 1 حساب السرعة اللحظية لجسم يتحرّك على محور

تتحرّك نقطة على المحور x . تمثل الدالّة $s(t)=t^2-5t+4$ دالّة موقعها، حيث يُقاس الزمن t بالثواني والموقع s بالأمتار. جِد السرعة الوسطية (المتوسطة) لهذه النقطة خلال الثانيتين الأوليين ثم جِد سرعتها اللحظية عند $t=2$.

الحــل

لإيجاد السرعة الوسطية للنقطة خلال الثانيتين الأوليين، جِد المسافة التي قطعتها النقطة خلال هذه الفترة. هذه المسافة هي

$$s(2)-s(0)=(2)^2-5(2)+4-\left[(0)^2-5(0)+4\right]=4-10=-6$$

قطعت النقطة خلال ثانيتين مسافة 6 أمتار في الاتجاه السالب على المحور، مما يجعل سرعتها الوسطية (المتوسطة) 3 أمتار في الثانية في الاتجاه السالب أو -3m/s. لإيجاد السرعة اللحظية للنقطة عند $t=2$ ، جِدّ قيمة المشتقّة $s'(t)$ عند $t=2$.

$$s'(t)=2t-5 \quad \text{وَ} \quad s'(2)=2(2)-5=-1$$

لاحظ أن السرعة التي وجدتها لا تدل على السرعة التي تتحرّك بها النقطة فقط، بل تدل أيضًا على اتجاهها. لهذا السبب، سوف نسمّيها **السرعة المتّجهة**. أما **مقدار السرعة** فهو القيمة المطلقة للسرعة المتّجهة. فالسرعة المتّجهة للنقطة عند $t=2$ هي -1m/s أو متر واحد في الثانية في الاتجاه السالب للمحور. ومقدار هذه السرعة هو متر واحد في الثانية.



1. ما السرعة الوسطية (المتوسطة) المتّجهة للنقطة خلال الفترة من $t_1=3$ إلى $t_2=7$؟ كم كانت سرعتها اللحظية المتّجهة عند $t=5$ إذا علت $s(t)=t^2-5t+4$ ؟

السرعة نفسها دالّة بدلالة الزمن وهي تتغيّر بمروره. تدل مشتقّة السرعة على كيفية تغيّرها. فكما تدل السرعة على كيفية تغيُّر الموقع تدل مشتقّة السرعة على كيفية تغيُّر السرعة. **التسارع (التعجيل)** هو مشتقّة السرعة. لتجدَ التسارع (التعجيل) اشتقّ دالّة الموقع مرتين متتاليتين، أي جِد المشتقة الثانية لدالّة الموقع.

دالّة الموقع	$s(t)$
دالّة السرعة	$v(t)=s'(t)$
دالّة التسارع	$a(t)=v'(t)=s''(t)$

مثـــــال 2 حساب تعجيل جسم يتحرّك على محور

بالعودة إلى معطيات المثال 1، جد تسارع النقطة عند $t=5$.

الحـل

لتجدَ تسارع النقطة، جد المشتقة الثانية لدالّة الموقع.

$$v(t)=s'(t)=2t-5 \quad \text{وَ} \quad a(t)=s''(t)=2$$

تسارع النقطة ثابت لا يتغيّر وهو $2\text{m}/\text{s}^2$.



نقطة مراقبة **2.** بالعودة إلى معطيات المثال 1، جد تسارع النقطة عند $t=6$.

الحركة العمودية

تُعبّر دالة الموقع، في الحركة العمودية، عن ارتفاع الجسم عن سطح الأرض بافتراض أنه يتحرّك على خط مستقيم عمودي موجّه إلى الأعلى، بحيث يُمكن اعتباره محور الإحداثيات y .
أدّت الدراسات الاختبارية والنظرية إلى نتيجة فحواها أن الدالّة

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$$

تشكّل نموذجًا لدراسة ارتفاع جسم عن سطح الأرض بمرور الزمن t منذ إطلاقه، بعد قذفه من ارتفاع أصلي s_0 بسرعة إطلاق أصلية v_0 . يُمثّل g، في هذا النموذج، تسارع جاذبية الأرض (Gravitation) وتختلف قيمته باختلاف الوحدة المستعملة لقياس المسافة.

نموذج الحركة العمودية

وحدة قياس المسافة	وحدة قياس السرعة	قيمة g	النموذج
متر m	m / s	$g=9.8\text{m}/\text{s}^2$	$s(t)=-4.9t^2+v_0t+s_0$
قدم ft	ft / s	$g=32\text{f}/\text{s}^2$	$s(t)=-16t^2+v_0t+s_0$

مثـــــال 3 استعمال الاشتقاق لإيجاد السرعة

في احتفال للألعاب النارية، تم إطلاق سهم نحو الأعلى عن منصة تعلو 4 أقدام عن سطح الأرض، وبسرعة أصلية ابتدائية (Initial Velocity) مقدارها 160 قدمًا في الثانية.

أ اكتب دالّة الموقع لحركة السهم.

ب ما أعلى ارتفاع يصل السهم إليه؟

ج ما السرعة المتّجهة للسهم عند وصوله إلى ارتفاع 260 قدمًا صعودًا وهبوطًا؟

د ما تعجيل السهم في كل لحظة؟

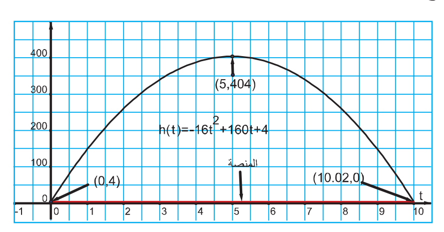
هـ متى يقع السهم على الأرض؟

الحــل

أ بالاستناد إلى ما سبق، تكون دالّة الموقع لحركة السهم $s(t)=-16t^2+160t+4$.

ب يصل السهم إلى أعلى ارتفاع له عندما يُصبح مقدار سرعته 0. السرعة المتجهة للسهم، بدلالة الزمن، هي $v(t)=s'(t)=-32t+160$. تصبح هذه السرعة 0 عندما يتَّخذ t قيمة جذر المعادلة $-32t+160=0$ أي $t=5$. ينتج من ذلك أن أعلى ارتفاع يبلغه السهم هو $s(5)=-16(5)^2+160(5)+4=404\text{ft}$.

ج لتحديد السرعة المتَّجهة للسهم عندما يبلغ ارتفاعه 260 قدمًا، يجب إيجاد قيمة t عندها. لذا، ابدأ بحل المعادلة:



$$-16t^2+160t+4=260$$
$$-16t^2+160t+4=260$$
$$16t^2-160t+256=0$$
$$16(t-2)(t-8)=0$$

لهذه المعادلة جذران: $t=2$ وَ $t=8$. يبلغ السهم ارتفاع 260 قدمًا وهو صاعد عند $t=2$ وتكون سرعته المتَّجهة قيمة مشتقّة دالّة عندها أي

$$v(2)=-32(2)+160=96\text{ft/s}$$

كما يُدرك السهم هذا الارتفاع وهو هابط عند $t=8$ وتكون سرعته المتَّجهة عندها

$$v(8)=-32(8)+160=-96\text{ft/s}$$

لاحظ أن سرعتي السهم، صعودًا وهبوطًا، عند الارتفاع 260 تتساويان في المقدار، وأن السرعة في الصعود موجبة وفي الهبوط سالبة.

د لإيجاد تسارع (تعجيل) السهم، جِد المشتقّة الثانية لدالّة الموقع. إنها $a(t)=s''(t)=-32$.
لاحظ أن تسارع (تعجيل) السهم هو نفسه في أي لحظة وأنه سالب دائمًا.

هـ يُدرك السهم الأرض عندما يُصبح ارتفاعه 0 أي عندما $s(t)=0$.

$$-16t^2+160t+4=0$$

مميّز هذه الدالة هو $\Delta=160^2-4(4)(-16)$

$$=16^2(100+1)$$
$$=16^2\times101$$

لهذه المعادلة جذران $\frac{-160\pm16\sqrt{101}}{2(-16)}$ أو $t_1\approx-0.02$ وَ $t_2\approx10.02$
لاحظ الزمن الذي يتطلّبه سقوط السهم على الأرض هو أكثر بقليل من الزمن الذي يتطلّبه رجوعه إلى المنصة و 10 ثوان بالضبط.

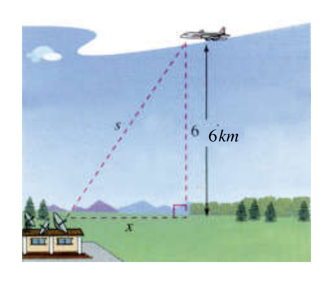
لاحظ

المنحنى يُبين سلوك الدالة $s(t)$



3. أجب عن أسئلة المثال 3، معتبرًا أن السهم أطلق من ارتفاع 2.4m بسرعة أصلية (ابتدائية) 49m/s . وفي السؤال ج، جِد السرعة المتَّجهة للسهم عندما يكون على ارتفاع 120 m .

مثـــال 4 إيجاد سرعة طائرة بواسطة الرادار



تحلّق طائرة على خط طيران أفقي يمر فوق محطة رادار كما يُبيّن ذلك الرسم المقابل. ما السرعة المتجهة لهذه الطائرة عندما تكون على مسافة $s=10\text{km}$ من محطة الرادار، علمًا بأن المسافة s تتناقص بمعدّل 400 km/h ؟

الحل

تقاس السرعة المتّجهة للطائرة بمعدّل تغيّر المسافة الأفقية بينها وبين موقع الرادار، مما يجعل الدالّة $x(t)$ دالّة الموقع للطائرة.

لذا، جِد مشتقّة $x(t)$.

من ناحية أخرى، يرتبط المتغيّران x وَ s بالعلاقة $x^2+6^2=s^2$. استعمل الاشتقاق الضمني لتجد $x'(t)$.

$$x^2+6^2=s^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(x^2+6^2)=\frac{d}{dt}(s^2) \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}=2s\frac{ds}{dt} \Rightarrow x\frac{dx}{dt}=s\frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{s}{x}\frac{ds}{dt}$$

عندما تكون الطائرة على مسافة $s=10\text{km}$، فإن $x=\sqrt{10^2-6^2}=8$ وَ $\frac{ds}{dt}=-400$.

ينتج من ذلك: $\frac{dx}{dt}=\frac{s}{x}\frac{ds}{dt}=\frac{10}{8}(-400)=-500$

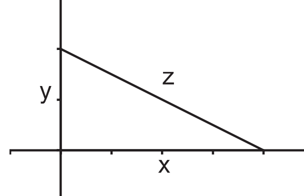
السرعة المتجهة للطائرة، عندما تكون على بعد 10 km من محطة الرادار، هي -500km/h مما يجعل مقدار سرعتها عند تلك اللحظة 500 km/h .



4. تحلّق طائرة على خط طيران يمر فوق محطة رادار كما يُبيّن ذلك رسم المثال 5. ما معدّل تناقص المسافة s علمًا بأن السرعة المتّجهة للطائرة عندما تكون على مسافة $s=9\text{ km}$ من محطة الرادار هي -450km/h؟

مثـــال 5 إيجاد معدّل تغيّر المسافة بين جسمين متحرّكين.

تحرّكت سيارتان. الأولى باتجاه الشرق بسرعة ثابتة قدرها 40km/h والثانية باتجاه الشمال بسرعة ثابتة قدرها 30km/h . جد معدّل تغيّر المسافة بين السيارتين بعد أن تكون الأولى قطعت 4km والثانية 3km .



الحل

من الواضح أن $\frac{dx}{dt}=40$ وَ $\frac{dy}{dt}=30$

المطلوب هو إيجاد $\frac{dz}{dt}$.

غير أن المسافات x وَ y وَ z ترتبط فيما بينهما بالعلاقة $z^2=x^2+y^2$ استنادًا إلى مبرهنة فيثاغورس. لذا

$$2zz'=2xx'+2yy'$$

أو $zz'=xx'+yy'$

غير أن $z=5$ عندما $x=4$ وَ $y=3$.

إذًا $5z'=4x'+3y'$

$$5z'=4\times40+3\times30=250$$

وبالتالي $\frac{dz}{dt}=z'=50$ أي 50km/h.

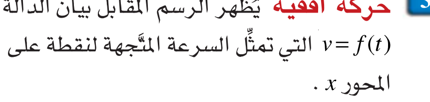


5. تحركت شاحنة A من شرق موقع باتجاه الموقع بسرعة ثابتة 40km / h وبالوقت نفسه تحركت شاحنة B من الموقع باتجاه الجنوب بسرعة ثابتة: جد معدل تغير المسافة بين الشاحنتين عندما تصبح الاولى على بُعد 4k من الموقع والثانية على بُعد 3k منه؟

خلاصة

لحل المسائل مُعدّلاً التغيّر المرتبط بالزمن

1. ارسم ان امكن وضع الرموز للمتغيرات
2. اكتب المعلومات العددية المعطاة بالسؤال باللحظة المطلوبة
3. اكتب المطلوب
4. اكتب العلاقة التي تربط المتغيرات بأية لحظة
5. اشتق ضمنيًا بالنسبة للزمن وعوض بالمعلومات الواردة في 2 ستجد المطلوب بتلك اللحظة.



4-3 التمارين

1 **مساحة** مستطيل طوله $2t+1$ وعرضه $\sqrt{t}$، جِد معدّل تغيّر مساحة هذا المستطيل مع تغيّر t.

2 **حجم** أسطوانة قائمة نصف قطر قاعدتها $\sqrt{t+2}$ وارتفاعها $\frac{1}{2}\sqrt{t}$. جِد معدل تغيُّر حجم الأسطوانة مع تغيّر t.

3 **حركة أفقية** يُظهر الرسم المقابل بيان الدالّة $v=f(t)$ التي تمثِّل السرعة المتَّجهة لنقطة على المحور x.

أ متى تتحرّك النقطة إلى الوراء؟ إلى الأمام؟ متى تتزايد سرعتها ومتى تتناقص؟

ب متى يكون تسارع النقطة موجبًا؟ سالبًا؟ صفرًا؟

ج متى تتحرّك النقطة بأقصى سرعتها؟

د متى تكون النقطة متوقّفة عن الحركة لأكثر من لحظة؟

افترض أن x وَ y دالّتان بدلالة t وقابلتان للاشتقاق. جِد المطلوب باستعمال المعطى.

	العلاقة بين x وَ y	المطلوب	المعطى
4	$y=\sqrt{x}$	$\frac{dy}{dt}$ عند $x=4$	$\frac{dx}{dt}=3$
5	$x^2+y^2=25$	$\frac{dy}{dt}$ عند $x=3$ وَ $y=4$ $\frac{dx}{dt}$ عند $x=4$ وَ $y=3$	$\frac{dx}{dt}=8$ $\frac{dy}{dt}=-2$

GRADE12-CHAPTER 3 2013-final 2/12/15 2:09 PM Page 35

في التمرينين 6 وَ 7، تتحرك نقطة على البيان الذي يُمثّل الدالّة y المُعطاة. جِد $\frac{dy}{dt}$ عند كل قيمة معيّنة لـ x ، علمًا بأن $\frac{dx}{dt}=2\text{cm/s}$.

6 $y=x^2+1$ ، $x=-1$ ، $x=0$ ، $x=1$

7 $y=\sin x$ ، $x=\frac{\pi}{6}$ ، $x=\frac{\pi}{4}$ ، $x=\frac{\pi}{3}$

8 جِد معدّل تغيّر المسافة بين نقطة تتحرّك على القطع المكافئ $y=x^2+1$ ونقطة الأصل، علمًا بأن $\frac{dx}{dt}=2\text{cm/s}$.

9 جِد معدّل تغيّر المسافة بين نقطة تتحرّك على بيان الدالّة $y=\sin x$ ونقطة الأصل، علمًا بأن $\frac{dx}{dt}=2\text{cm/s}$.

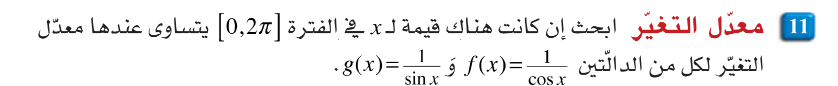
10 مثلث متساوي الساقين، طول كل ساق منهما s والزاوية بينهما θ .

أ بيّن أن مساحة المثلث تساوي $A=\frac{1}{2}s^2\sin\theta$

ب إذا ازدادت θ بمعدّل $\frac{1}{2}$ راديان في الثانية، جِد معدّل تغيّر مساحة المثلّث عند $\theta=\frac{\pi}{6}$ وَ $\theta=\frac{\pi}{3}$.

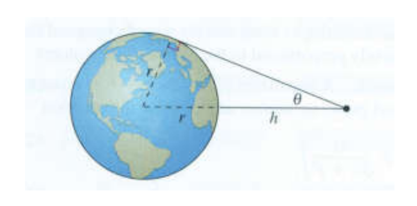


ج وضّح لماذا يكون معدّل تغيّر مساحة المثلث غير ثابت رغم أن معدّل تغيّر θ ثابتًا.



11 **معدّل التغيّر** ابحث إن كانت هناك قيمة لـ x في الفترة $[0,2\pi]$ يتساوى عندها معدّل التغيّر لكل من الدالّتين $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ وَ $g(x)=\frac{1}{\sin x}$.

12 عندما تراقب أقمار التجسُّس الكرة الأرضية، فهي تراقب جزءًا منها. تتمتّع بعض هذه الأقمار بالقدرة على قياس الزاوية θ المبيّنة في الرسم أدناه حيث يمثّل h المسافة بين قمر التجسُّس والأرض، ويمثّل r نصف قطر الكرة الأرضية.



أ بيّن أن $h=r\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)$.

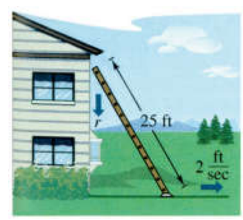
ب جِد معدّل التغيّر لـ h بدلالة θ عند $\theta=30°$. (افترض أن $r=6373\text{km}$) .

حول المفاهيم

13 يرتبط المتغيّران x وَ y بالعلاقة $y=ax+b$ ، حيث a وَ b عددان حقيقيان. افترض أن كلاً من المتغيّرين دالّة بدلالة t وأن معدّل تغيّر x ثابت. هل معدّل تغيّر y ثابت أيضًا؟ إذا كان كذلك، فهل يساوي معدّل تغيّره معدّل تغيّر x؟ وضّح ذلك.

14 دالة الموقع لجسم متحرّك هي $s(t)=t^3-6t^2+9t$ بالأمتار.
جِد تسارع هذا الجسم عند كل لحظة تكون سرعته صفرًا.

15 **زاوية الارتفاع** يرتفع منطاد بسرعة 3 m/s انطلاقًا من نقطة على الأرض تقع على بعد 30 m من مراقب. جِد معدّل تغيّر زاوية الارتفاع عندما يكون المنطاد على ارتفاع 30 m فوق سطح الأرض.



16 سلّم طوله 25 قدمًا يستند إلى حائط. تجر عربة الطرف الأسفل للسلم بسرعة قدمين في الثانية.

أ) ما سرعة رأس السلم نزولاً على الحائط عندما يكون أسفل السلم على بعد 7 أقدام من الحائط؟ 15 قدمًا؟ 24 قدمًا؟

ب) جِد معدّل تغيّر مساحة المثلث الذي يشكّله السلم مع الحائط والأرضِ عندما يكون أسفل السلم على بعد 7 أقدام من الحائط.

الفصل 3

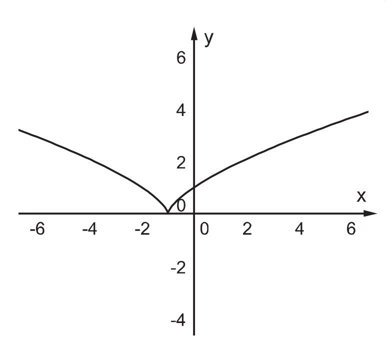
مراجعة الفصل

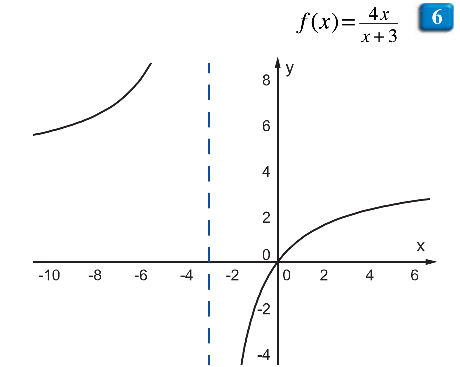
في التمارين من 1 إلى 4، جِد مشتقّة كل دالّة باستعمال تعريف المشتقّة.

1 $f(x)=x^2-2x+3$ 2 $f(x)=\sqrt{x}+1$ 3 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ 4 $f(x)=\frac{2}{x}$

في التمرينين 5 و 6، حدّد قيم x حيث الدالّة تقبل الاشتقاق.

5 $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}$ 6 $f(x)=\frac{4x}{x+3}$





7 ارسم بيان الدالّة $f(x)=4-|x-2|$.

أ هل الدالّة مستمرة عند $x=2$؟

ب هل الدالّة تقبل الاشتقاق عند $x=2$؟ أوضح جوابك.

8 ارسم بيان الدالّة $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+2 & x<-2 \\ 1-4x-x^2 & x\geq -2 \end{cases}$.

أ هل الدالّة مستمرة عند $x=-2$؟

ب هل الدالّة تقبل الاشتقاق عند $x=-2$؟ أوضح جوابك.

في التمرينين 9 و 10، جِد ميل الدالّة عند النقطة المحدَّدة.

9 $g(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{x}{6}$ ؛ $\left(-1,\frac{5}{6}\right)$ 10 $h(x)=\frac{2}{8}x-2x^2$ ؛ $\left(-2,-\frac{34}{4}\right)$

في التمرينين 11 و 12،

أ جد معادلة مماسّ بيان الدالّة عند النقطة المعيّنة.

ب ارسم بيان الدالّة والمماس عند هذه النقطة.

11 $f(x)=x^3-1$ ؛ $(-1,-2)$ 12 $f(x)=\frac{2}{x+1}$ ؛ $(0,2)$

في التمارين من 13 إلى 33، جِد مشتقّة الدالّة.

13 $f(x)=-12$

14 $f(x)=x^{12}$

15 $f(x)=-8x^5$

16 $f(x)=x^3-3x^2$

17 $f(x)=6\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$

18 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$

19 $f(x)=\frac{2}{(3x)^2}$

20 $f(x)=4\cos x+6$

21 $f(x)=3\cos x-\frac{\sin x}{4}$

22 $f(x)=(3x^2+7)(x^2-2x+3)$

23 $f(x)=\sqrt{x}\sin x$

24 $f(x)=x^3\cos x$

25 $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2-1}$

26 $f(x)=\frac{9}{3x^2-2x}$

27 $f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$

28 $f(x)=2x-x^2\tan x$

29 $f(x)=x\cos x-\sin x$

30 $f(x)=\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)^2$

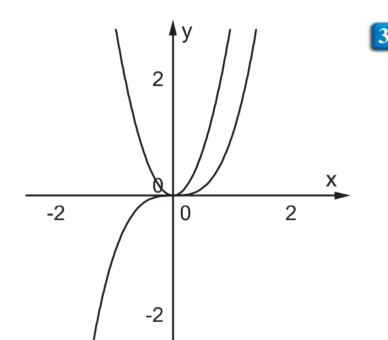
31 $f(x)=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x-\frac{2}{7}\sin^{\frac{7}{2}}x$

32 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

33 $f(x)=\frac{\cos(x-1)}{x-1}$

كتابة يُظهر الرسم بيان دالّة وبيان مشتقّتها الأولى. ميّز بيان الدالّة وبيان مشتقّتها، وأوضح ما استندت إليه لإجراء ذلك.

34



في التمارين 35 إلى 40، جِد المشتقّة الثانية للدالّة.

35 $f(x)=2x^2+\sin 2x$

36 $f(x)=\frac{1}{x}+\tan x$

37 $f(x)=\frac{1}{\tan x}$

38 $f(x)=\sin^2 x$

39 $f(x)=\frac{6x-5}{x^2+1}$

40 $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

في التمارين من 41 إلى 34، استعمل مبرهنة لوبيتال لتجد النهاية المطلوبة.

41 $\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{x-1}$

42 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$

43 $\lim_{x\to +\infty} xe^{-x^2}$

الفصل 3 تحضيـــر للاختبـــار

1 $f(x)=4-3x$. أي مما يلي يساوي $f'(-1)$؟

أ -7 ب 7 ج -3 د 3 هـ غير ذلك

2 $f(x)=1-3x^2$. أي مما يلي يساوي $f'(1)$؟

أ -6 ب -5 ج 5 د 6 هـ غير ذلك

3 أي مما يلي صحيح للدالة $f(x)=x^{\frac{4}{5}}$ عند $x=0$؟

أ لبيانها زاوية عند هذه النقطة.

ب لها مماسّ عمودي عند هذه النقطة.

ج الدالّة منقطعة عند هذه النقطة.

د $f(0)$ غير مُعرَّفة.

هـ تقبل الاشتقاق عند هذه النقطة.

4 $f(x)=u(x)v(x)$. جِد $f'(1)$ علمًا بأن $u(1)=2$ ، $u'(1)=3$ ، $v(1)=-1$ ، $v'(1)=1$.

أ -4 ب -1 ج 1 د 4 هـ 7

5 المشتقّة الثانية للدالّة $f(x)=x-\frac{1}{x}$ هي:

أ $1+\frac{1}{x^2}$ ب $1-\frac{1}{x^2}$ ج $\frac{2}{x^3}$ د $-\frac{2}{x^3}$ هـ غير ذلك

6 أي مما يلي يساوي $\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$؟

أ $\frac{2}{(x-1)^2}$ ب 0 ج $\frac{x^2+1}{x^2}$ د $2x-\frac{1}{x^2}-1$ هـ $-\frac{2}{(x-1)^2}$

7 أي مما يلي يساوي عدد المماسات الأفقية للدالّة $f(x)=(x^2-1)(x^2+1)$ ؟

أ 0 ب 1 ج 2 د 3 هـ 4

8 جِد معدّل التغيّر اللحظي للدالّة $f(x)=\frac{x^2+2}{x+4}$ عند $x=-1$.

أ -1 ب -4 ج 0 د 4 هـ 7

9 جِد معدّل التغيّر اللحظي لحجم مكعّب طول ضلعه x .

أ x ب $3x$ ج $6x$ د $3x^2$ هـ x^3

في التمرينين 10 و 11، تتحرّك نقطة على المحور x ودالّة موقعها $s(t)=2+7t-t^2$ حيث $t\geq 0$.

10 عند أي من الأوقات التالية تتحرّك النقطة إلى اليسار؟

أ $t=0$ ب $t=1$ ج $t=2$ د $t=\frac{7}{2}$ هـ $t=4$

11 عند أي من الأوقات التالية تتوقّف النقطة؟

أ $t=1$ ب $t=2$ ج $t=\frac{7}{2}$ د $t=4$ هـ $t=5$

12 أي مما يلي معادلة لمماسّ الدالّة $y=\sin x+\cos x$ عند $x=\pi$ ؟

أ $y=-x+\pi-1$ ب $y=-x+\pi+1$ ج $y=-x-\pi+1$

د $y=-x-\pi-1$ هـ $y=x-\pi+1$

13 جِد y'' حيث $y=x\sin x$.

أ $-x\sin x$ ب $x\cos x+\sin x$ ج $-x\sin x+2\cos x$

د $x\sin x$ هـ $-\sin x+\cos x$

14 يتحرّك جسم بحسب دالّة الموقع $s(t)=3+\sin t$. عند أي من الأوقات التالية، تساوي سرعة الجسم 0؟

أ $t=0$ ب $t=\frac{\pi}{4}$ ج $t=\frac{\pi}{2}$ د $t=\pi$ هـ $\frac{3\pi}{4}$

15 $y=\tan(4x)$. أي مما يلي هو $\frac{dy}{dx}$ ؟

أ $\frac{4\tan(4x)}{\cos x}$ ب $\frac{\tan(4x)}{\cos(4x)}$ ج $\frac{4}{\tan x}$ د $\frac{1}{\cos^2(4x)}$ هـ $\frac{4}{\cos^2(4x)}$

16 $y=\cos^2(x^3+x^2)$. أي مما يلي هو $\frac{dy}{dx}$ ؟

أ $-2(3x^2+2x)$

ب $-(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

ج $-2(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

د $2(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

هـ $2(3x^2+2x)$

17 $x^2-xy+y^2=1$. أي مما يلي يساوي $\frac{dy}{dx}$ ؟

أ $\frac{y-2x}{2y-x}$ ب $\frac{y+2x}{2y-x}$ ج $\frac{2x}{x-2y}$ د $\frac{2x+y}{x-2y}$ هـ $\frac{2x+y}{x}$

18 $y=x^{\frac{3}{4}}$. أي مما يلي يساوي $\frac{dy}{dx}$ ؟

أ $\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{4}$ ب $\frac{4x^{\frac{1}{4}}}{3}$ ج $\frac{3x^{\frac{1}{4}}}{4}$ د $\frac{4}{3x^{\frac{1}{4}}}$ هـ $\frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$

19 أي مما يلي ميل مماس المنحنى $y^2-x^2=1$ عند النقطة $(1,\sqrt{2})$ ؟

أ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ب $-\sqrt{2}$ ج $\frac{1}{\sqrt{2}}$ د $\sqrt{2}$ هـ 0

الفصل

4

تطبيقات الاشتقاق
Applications of Differentiation

الفصل الرابع

الدروس

يتأثر استهلاك السيارة للوقود بعدّة عوامل منها نوعية الإسفلت الذي يُغطي الطريق ونوعية الإطارات، والسرعة، ونوعية البنزين. تستعمل إحدى شركات السيارات، الدالّة

$m(v)=0.00015v^3-0.032v^2+1.8v+1.7$

كنموذج لحساب المسافة(بالميل) التي تقطعها السيارة في كل غالون من الوقود، بدلالة السرعة v (ميل بالساعة). بأي سرعة عليك أن تقود سيارة من هذا النوع لكي تقطع أكبر مسافة بالغالون الواحد؟

هل أنت مستعد؟

المُفْرَدات

1 اربط كل عبارة في العمود الأيمن بتفسيرها في العمود الأيسر.

1. معدّل التغيّر
2. السرعة اللحظية
3. دالّة الموقع
4. دالّة قابلة للاشتقاق

أ دالّة تحدّد موقع الجسم المتحرّك بدلالة الزمن.
ب ناتج قسمة المسافة على الزمن.
ج نسبة مقامها تغيّر المتغيّر الحر وبسطها تغيّر المتغيّر التابع.
د سرعة الجسم المتحرّك عند لحظة معيّنة.
هـ دالّة ميلها مُعرّف عند كل نقطة من نقاط بيانها.

حساب المشتقّة

في التمارين من 2 إلى 7 ، جِد مشتقّة الدالّة.

2 $f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$　**3** $f(x)=2\sin x\cos x$　**4** $f(x)=x\sqrt{2x+1}$

5 $f(x)=\ln\sqrt{x}$　**6** $f(x)=e^{(1+\ln x)}$　**7** $f(x)=xe^{-x}$

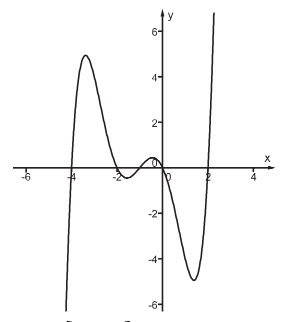
تحديد إشارة الدالّة جبريًّا وبيانيًّا

في التمارين من 8 إلى 10، حدّد قيم x عندما تتغير إشارة الدالّة، مُبيّنًا التغيّر الحاصل في الإشارة عند كل نقطة.

8 $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$　**9** $f(x)=x^2-9$　**10** $f(x)=\ln x$

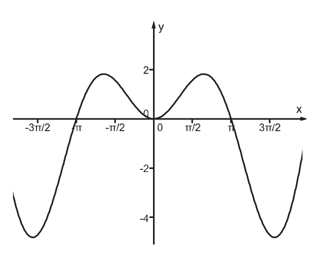
في التمرينين 11 وَ 12، ادرس إشارة الدالّة على الفترة المعيّنة.

11



على الفترة $[-5, 5]$

12



على الفترة $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

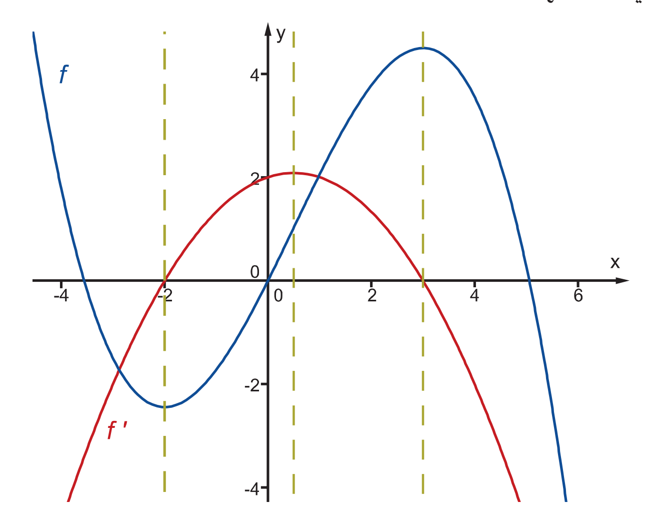
1-4 اختبار المشتقّة الأولى
First Derivative Test

الأهداف
- يُدرك مفهوم القيمة القصوى المحلّية للدالّة ويميّزها.
- يجد القيم القصوى المحلّية لدالّة.
- يحدّد فترات تزايد الدالّة وفترات تناقصها.
- يستعمل اختبار المشتقّة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلّية للدالّة.

المفردات Vocabulary

Decreasing	متناقصة
Increasing	متزايدة
Local Minimum	قيمة صغرى محلّية
Local Maximum	قيمة كبرى محلّية
Point of Inflection	نقطة انقلاب
Critical Value	قيمة حرجة
Table of Variations	جدول التغيّرات

هناك علاقة قوية بين الدالّة ومشتقّاتها بحيث يُمكنك استخلاص أمور عدّة تتعلّق بالدالّة انطلاقًا من معطيات تعرفها عن مشتقّتها الأولى أو مشتقّتها الثانية. سوف تتعلم في هذا الفصل أمورًا عن هذه العلاقة وكيفية استعمالها.



تزايد الدوال وتناقصها

يُظهر الرسم البياني أعلاه بيان دالّة f (بالأزرق) وبيان مشتقّتها الأولى (بالأحمر). إذا تفحّصت هذا الرسم البياني، تستنتج التالي:

1. عندما يتحرّك x من اليسار إلى اليمين على محوره، تتحرّك النقطة $M(x, f(x))$ على بيان الدالّة نحو الأسفل، تعبيرًا عن تناقص قيم $f(x)$، حتى يصل x إلى -2 . تُعبّر عن ذلك بالقول إن الدالّة **متناقصة** على الفترة $]-\infty, -2[$.
2. بعد أن يجتاز x القيمة -2 ، تتحرّك النقطة $M(x, f(x))$ على بيان الدالّة نحو الأعلى تعبيرًا عن تزايد قيم $f(x)$ ، حتى يصل x إلى 3. تُعبّر عن ذلك بالقول إن الدالّة **متزايدة** على الفترة $]-2, 3[$.
3. تعود النقطة $M(x, f(x))$ إلى التحرُّك على بيان الدالّة نحو الأسفل بعد أن يجتاز x القيمة 3، تعبيرًا عن تناقص قيم $f(x)$ من جديد. تُعبّر عن ذلك بالقول إن الدالّة **متناقصة** على الفترة $]3, +\infty[$.
4. قيم المشتقّة الأولى للدالّة سالبة على الفترة $]-\infty, -2[$ وعلى الفترة $]3, +\infty[$ في حين أنها موجبة على الفترة $]-2, 3[$.
5. يتلازم **تناقص** الدالّة على فترة مع كون قيم المشتقّة الأولى **سالبة**. ويتلازم **تزايدها** مع كون قيم المشتقّة الأولى **موجبة**.

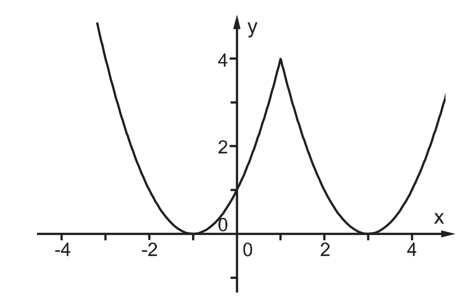
تسمّى قيم x التي تجعل $f'(x)=0$ قيمًا **حرجة** للدالّة.

يُمكنك تلخيص ما سبق في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$	$-$
$f(x)$	متناقصة ↘		متزايدة ↗	متناقصة ↘

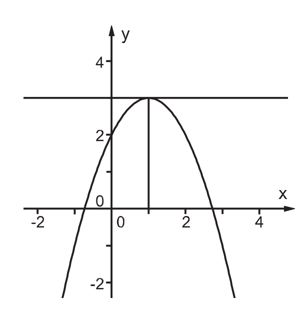
تعريف القيم الحرجة

f دالّة مُعرّفة عند $x=c$. نقول عن القيمة c للمتغيّر الحر x إنها **قيمة حرجة** للدالّة f إذا كانت مشتقّتها غير معرّفة عند $x=c$، أو إذا كان $f'(c)=0$.



$f'(x)$ غير مُعرَّفة عند $x=1$

1 قيمة حرجة للدالّة



$f'(x)=0$

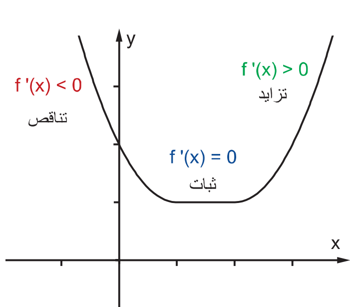
1 قيمة حرجة للدالّة

تعريف الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة

نقول عن دالّة f إنها **متزايدة** على فترة $I=]a,b[$ إذا كان التباين $x_1<x_2$ يؤدي إلى التباين $f(x_1)<f(x_2)$ أيًّا يكن x_1 و x_2 في الفترة I.

كما نقول عن f إنها **متناقصة** على فترة $I=]a,b[$ إذا كان التباين $x_1<x_2$ يؤدي إلى التباين $f(x_1)>f(x_2)$ أيًّا يكن x_1 وَ x_2 في الفترة I.

بمعنى آخر، تكون الدالّة متزايدة عندما تتحرّك النقطة $(x, f(x))$ إلى الأعلى كلّما تحرّك x إلى اليمين. وتكون متناقصة عندما تتحرّك النقطة $(x, f(x))$ إلى الأسفل كلّما تحرّك x إلى اليمين. على سبيل المثال، يُبيّن الرسم المقابل أن الدالة متناقصة على الفترة $]-\infty, a[$ ، وثابتة على الفترة $]a, b[$ ومتزايدة على الفترة $]b, +\infty[$. كما يُبيّن الرسم أن كون المشتقّة موجبة يُترجم بتزايد الدالّة كما يُترجم كون المشتقّة سالبة بتناقص الدالّة. أما انعدام المشتقّة $(f'(x)=0)$ في فترة ما، فيُترجم بثبات قيمة الدالّة على هذه الفترة.



مبرهنة 4-1 تزايد الدالّة وتناقصها

f دالة تقبل الاشتقاق.

1. إذا كانت $f'(x)>0$ على فترة I ، فإن f دالّة متزايدة على هذه الفترة.
2. إذا كانت $f'(x)<0$ على فترة I ، فإن f دالّة متناقصة على هذه الفترة.
3. إذا كانت $f'(x)=0$ على فترة I ، فإن f دالّة ثابتة على هذه الفترة.

مثـــال 1 فترات تزايد الدالّة وتناقصها

جد فترات تزايد الدالّة $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$ وفترات تناقصها.

الحل

f دالّة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالّة حدودية. لتحديد القيم الحرجة للدالّة، احسب مشتقّتها وحدِّد قيم x التي تُحوّل هذه المشتقّة إلى 0.

$$f'(x)=3x^2-2\left(\frac{3}{2}\right)x=3x^2-3x=3x(x-1)$$

قيم x حيث تكون المشتقّة 0 هي $x=0$ وَ $x=1$. للدالّة قيمتان حرجتان هما $x=0$ وَ $x=1$.

يُمكنك تلخيص ما سبق في الجدول التالي الذي يُسمى **جدول التغيّرات**.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x$	$-\infty$	$-$	0	$+$	3	$+$	$+\infty$
$(x-1)$	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)=0$	$\searrow$	$f(x)=-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

تتزايد الدالّة على الفترتين $]-\infty,0[$ وَ $]1,+\infty[$ وَتتناقص على الفترة $]0,1[$.



نقطة مراقبة 1. **جِد فترات تزايد الدالّة $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\frac{-9}{2}x$ وفترات تناقصها.**

لكي تفهم العلاقة بين إشارة المشتقّة على فترة وتزايد الدالّة أو تناقصها، لاحظ ما يلي:

إذا كانت الدالّة متزايدة فهذا يعني أن $f(x+h)>f(x)$ إذا كان $h>0$ ، ويعني أن $f(x+h)<f(x)$ إذا كان $h<0$. ينتج من ذلك أن $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0$ وبالتالي $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0$ في جميع الحالات التي تكون فيها الدالّة متزايدة. يُمكنك أن تُفسِّر بالطريقة نفسها لماذا تكون المشتقّة سالبة على فترة إذا كانت الدالّة متناقصة.

القيم الكبرى المحلّية والقيم الصغرى المحلّية

سوف تتعلم الآن كيف تستعمل المشتقّة لإيجاد القيم الكبرى المحلّية والقيم الصغرى المحلّية لدالّة. بالعودة إلى الرسم البياني المقابل، تستنتج ما يلي:

1. يمر بيان الدالّة بالنقطة G عندما يتّخذ x القيمة -2. كما يمر في النقطة H عندما يتّخذ x القيمة 3.

2. الإحداثيات y لجميع نقاط بيان الدالة في جوار النقطة G أكبر من الإحداثي y لهذه النقطة والذي يساوي $f(-2)$. نقول عن النقطة G أنها تمثّل **قيمة صغرى محلّية** للدالّة f وأن الإحداثي y لهذه النقطة هو **قيمة صغرى** محلّية للدالّة.

3. الإحداثيات y لجميع نقاط بيان الدالّة في جوار النقطة H أصغر من الإحداثي y لهذه النقطة والذي يساوي $f(3)$. نقول عن النقطة H أنها تمثّل **قيمة كبرى محلّية** للدالّة f، وأن الإحداثي y لهذه النقطة هو **قيمة كبرى محلّية** للدالّة.

4. تتّخذ المشتقّة الأولى القيمة 0 عندما تتّخذ الدالّة قيمة كبرى محلّية أو قيمة صغرى محلّية.
القيم القصوى المحلّية لدالّة هي قيمها الكبرى المحلّية وقيمها الصغرى المحلية.

يُلخّص الجدول التالي الملاحظات السابقة.

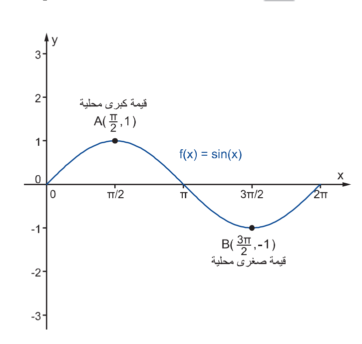
x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(3)$	↘

مثـــــال 2 قيم المشتقّة عند قيمة قصوى محلّية

جِد قيمة المشتقّة عند كل قيمة قصوى محلّية لكل من الدالّتين:

أ $f(x)=|x|$ على الفترة $[-1, 1]$

ب $f(x)=\sin x$ على الفترة $[0, 2\pi]$

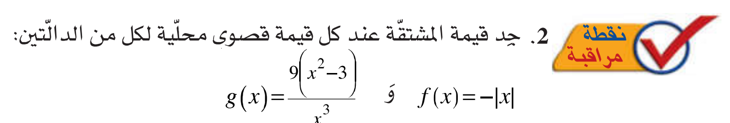


الحل

أ للدالّة $f(x)=|x|$ قيمة صغرى محلّية عند $x=0$. مشتقّة الدالّة غير معرَّفة عند هذه النقطة.

ب للدالّة $f(x)=\sin x$ قيمة كبرى محلّية عند $x=\frac{\pi}{2}$ وقيمة صغرى محلّية عند $x=\frac{3\pi}{2}$.
مشتقّة الدالّة هي $f'(x)=\cos x$ وهي تتّخذ، عند القيم القصوى، القيم التالية:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \text{و} \quad f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$$



نقطة مراقبة **2.** جِد قيمة المشتقّة عند كل قيمة قصوى محلّية لكل من الدالّتين:

$$f(x)=-|x| \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{9\left(x^2-3\right)}{x^3}$$

مبرهنة 2-4 اختبار المشتقّة الأولى

$x=c$ قيمة حرجة للدالّة f التي تقبل الاشتقاق في جوار هذه القيمة.

1. إذا تغيّرت إشارة $f'(x)$ من موجبة إلى سالبة عند المرور بـ $x=c$ ، فإن النقطة $(c,f(c))$ تمثّل قيمة كبرى محلّية.
2. إذا تغيّرت إشارة $f'(x)$ من سالبة إلى موجبة عند المرور بـ $x=c$ ، فإن النقطة $(c,f(c))$ تمثّل قيمة صغرى محلّية.

مثال 3 استعمال اختبار المشتقّة الأولى

جِد القيم القصوى المحلّية للدالّة $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$ في الفترة $]0, 2\pi[$.

الحل

الدالّة تقبل الاشتقاق على الفترة $]0, 2\pi[$.
ابدأ بإيجاد القيم الحرجة.

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$$

بما أن المشتقّة مُعرّفة أيًّا تكن قيمة x ، فإن القيم الحرجة للدالّة هي تلك التي تشكّل حلاً للمعادلة $\frac{1}{2}-\cos x=0$ والتي تنتمي إلى الفترة $]0, 2\pi[$. هناك قيمتان $x=\frac{\pi}{3}$ وَ $x=\frac{5\pi}{3}$.

جدول التغيّرات هو التالي:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$
$f(x)$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$	$\nearrow$	$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$	$\searrow$	π

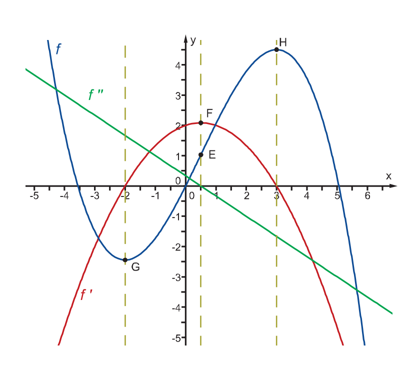
بعد إنشاء جدول التغيّرات يسهل تحديد القيم القصوى المحلّية وطبيعة كل منها وقيمتها. للدالّة f قيمة صغرى محلّية عند $x=\frac{\pi}{3}$ تبلغ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$ ، وقيمة كبرى محلّية عند $x=\frac{5\pi}{3}$ وتبلغ $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$.



3. جِد القيم القصوى المحلّية للدالّة $f(x)=\cos x-\frac{1}{2}x$ في الفترة $\left]-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ وحدِّد طبيعة كل منها.

نقاط الانقلاب

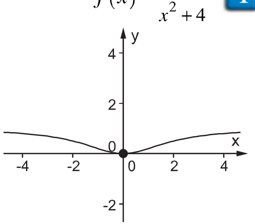
يُمثّل الشكل المقابل بيانات دالّة f (بالأزرق) ومشتقّتها الأولى (بالأحمر) ومشتقّتها الثانية (بالأخضر).
يُمكنك أن تُلاحظ أن بيان الدالّة مقعّر حيث المشتقّة الثانية موجبة، ومحدّب حيث المشتقّة الثانية سالبة.
وهو يتحوّل من التقعّر إلى التحدّب في النقطة E.
لاحظ أن الإحداثي x لهذه النقطة هو قيمة x التي تجعل المشتقّة الثانية تساوي 0 . تُسمّى E **نقطة انقلاب** للدالّة.



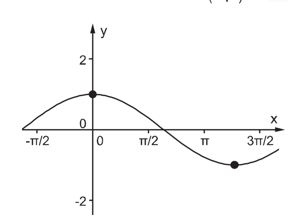
1-4 التمارين

في التمارين من 1 إلى 3، جِد قيمة المشتقّة (إن وجدت) عند كل قيمة قصوى.

1 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$



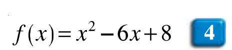
2 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

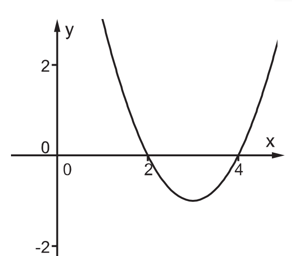


3 $f(x)=2-|x|$

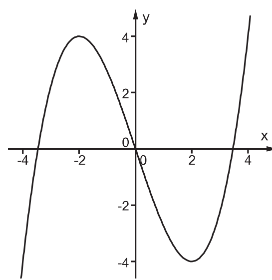
في التمارين من 4 إلى 10، حدّد فترات تزايد الدالّة، وفترات تناقصها.

4 $f(x)=x^2-6x+8$



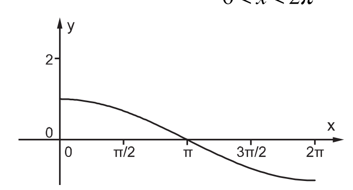


5 $f(x)=\frac{x^3}{4}-3x$



6 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$

$0<x<2\pi$



7 $f(x)=\frac{1}{x^2}$

8 $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

9 $f(x)=27x-x^3$

10 $f(x)=x-2\cos x \quad 0<x<2\pi$

في التمارين من 11 إلى 13، جِد القيم الحرجة للدالّة.

11 $f(x)=x^2(x-3)$

12 $f(x)=x^2\left(x^2-4\right)$

13 $f(x)=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

في التمارين من 14 إلى 22، أ) جِد القيم الحرجة، ب) جِد فترات تزايد الدالّة وفترات تناقصها، ج) استعمل اختبار المشتقّة الأولى لتحديد القيم القصوى المحليّة.

14 $f(x)=x^2-6x$

15 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$

16 $f(x)=x^2(3-x)$

17 $f(x)=\frac{x^5-5x}{5}$

18 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-4$

19 $f(x)=5-|x-5|$

20 $f(x)=x+\frac{1}{x}$

21 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$

22 $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+1}$

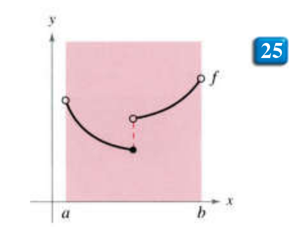
في التمرينين من 23 و 24، أ) جِد القيم الحرجة، ب) جِد فترات تزايد الدالّة وفترات تناقصها، ج) استعمل اختبار المشتقّة الأولى لتحديد القيم القصوى المحليّة. (اقتصر على الفترة $]0, 2\pi[$).

23 $f(x)=\frac{x}{2}+\cos x$

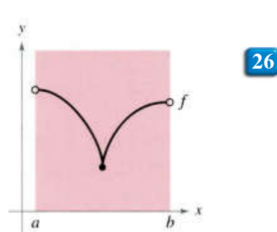
24 $f(x)=(\sin x)(\cos x)$

في التمارين من 25 إلى 298، حدّد إن كان للدالّة قيمة صغرى محليّة في الفترة $]a, b[$ بالاستناد إلى بيانها على هذه الفترة.

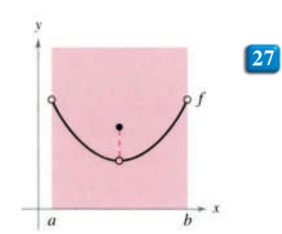
25



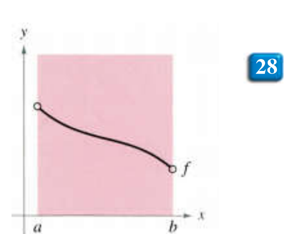
26



27



28



2-4 اختبار المشتقّة الثانية
Second Derivative Test

الأهداف

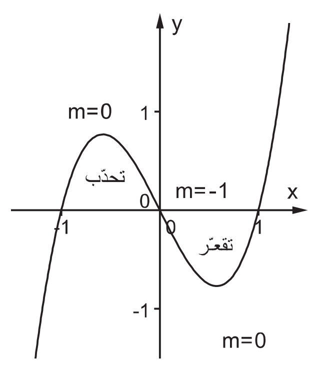
- يحدِّد الفترات التي يكون فيها بيان الدالّة مقعّرًا أو محدّبًا.
- يجد نقاط الانقلاب لبيان دالّة.
- يستعمل اختبار المشتقّة الثانية لتصنيف القيم القصوى المحلّية لدالّة.

المفردات Vocabulary

مقعّر	Concave
محدّب	Convex

التقعُّر والتحدُّب

إذا كانت f دالّة تقبل الاشتقاق على فترة مفتوحة، وكانت مشتقّتها الأولى متزايدة على هذه الفترة، نقول عن بيانها إنه **مقعّر** على هذه الفترة. لكن إذا كانت هذه المشتقّة متناقصة على الفترة، نقول إن بيانها **محدّب** على الفترة.



انظر إلى بيان الدالّة $f(x)=2x^3-2x$ في الرسم المقابل. هذا البيان محدّب على الفترة $]-\infty, 0[$ ومقعّر على الفترة $]0, +\infty[$.

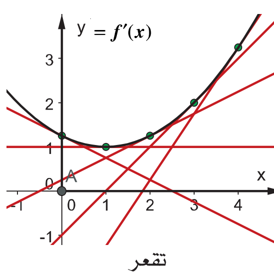
للدالّة مماسّ عند النقطة $(0, 0)$ حيث ينتقل بيانها من التحدُّب إلى التقعُّر.

اختبار التحدُّب والتقعُّر

f دالّة تقبل الاشتقاق مرّتين على فترة مفتوحة I :

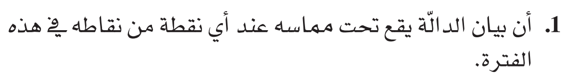
1. إذا كان $f''(x)>0$ على الفترة I ، فإن بيان الدالّة مقعّر على I .
2. إذا كان $f''(x)<0$ على الفترة I ، فإن بيان الدالّة محدّب على I .

لكي تفهم القاعدة التي تُحدد تقعّر بيان الدالّة أو تحدّبه على فترة مُعيّنة، تفحّص البيان المقابل وهو مُقعّر على الفترة $]-1, 5[$. تلاحظ:

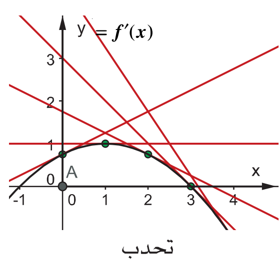


تقعر

1. أن بيان الدالّة يقع فوق مماسه عند أي نقطة من نقاطه في هذه الفترة.
2. يتزايد ميل المماس عند النقطة $(x, f(x))$ بتزايد x مما يعني أن مشتقة الدالّة متزايدة على هذه الفترة.
3. المُشتقة الثانية $f''(x)=(f'(x))'$ موجبة على هذه الفترة لأن المُشتقة الأولى متزايدة.



إذا درسنا حالة التحدب سنجد أن :



تحدب

1. أن بيان الدالّة يقع تحت مماسه عند أي نقطة من نقاطه في هذه الفترة.
2. يتناقص ميل المماس عند النقطة $((x, f(x))$ بتزايد x مما يعني أن مشتقة الدالة متناقصة على هذه الفترة.
3. المُشتقة الثانية $f''(x)$ سالبة على هذه الفترة لأن المُشتقة الأولى متناقصة.

مثـــال 1 تحديد التحدُّب والتقعُّر

جِد فترات التحدُّب وفترات التقعُّر للدالّة $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2$.

الحل

المشتقّة الأولى للدالّة هي $f'(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$

ومشتقّتها الثانية هي $f''(x)=\frac{3}{4}x^2-3$.

من الواضح أن $f''(x)=0$ عندما $x=\pm 2$.

من ناحية أخرى $f''(x)>0$ على مدى الفترة $]-\infty, -2[$

وعلى مدى الفترة $]2, +\infty[$ و $f''(x)<0$ على مدى الفترة $]-2, 2[$. ينتج من ذلك أن بيان الدالّة محدّب على مدى الفترة $]-2, 2[$ ومقعّر على مدى كل من الفترتين $]-\infty, -2[$ و $]2, +\infty[$. يُمكنك تلخيص ما سبق في الجدول التالي:

x	$-\infty$ ... -2	-2 ... 2	2 ... $+\infty$
$f''(x)$	+	−	+
البيان	∪	∩	∪

نقطة مراقبة **1.** جد فترات التحدُّب وفترات التقعُّر للدالّة $f(x)=x^4-4x^2+1$

نقاط الانقلاب

إذا عدت إلى بيان دالّة المثال 1، تجد أن البيان يتحوّل من التقعّر إلى التحدّب عند النقطة $(-2, f(-2))$ ومن التحدّب إلى التقعّر عند النقطة $(2, f(2))$.

نقول عن كل من هاتين النقطتين إنها **نقطة** انقلاب.

لا تنس

يفترض تعريف نقطة الانقلاب أن يكون للدالّة مماسّ عند النقطة.

تعريف نقاط الانقلاب

إذا كانت f دالّة مستمرة وإذا كان لبيانها **مماسّ** عند النقطة$(c, f(c))$، فإن هذه النقطة هي نقطة **انقلاب** للدالّة وبيانها إذا تحوّل البيان عند هذه النقطة من التقعّر إلى التحدّب، أو من التحدّب إلى التقعّر.

لإيجاد النقاط المرشّحة أن تكون نقاط انقلاب، حدِّد قيم x حيث $f''(x)=0$ أو حيث $f''(x)$ غير موجودة.

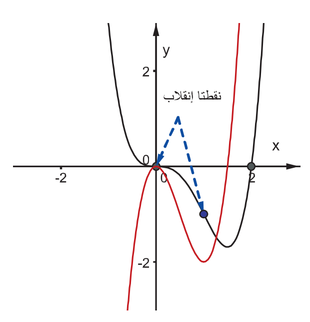
مبرهنة 4-3 نقطة الانقلاب

إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انقلاب للدالّة، فإن $f''(x)=0$ أو $f''(x)$ غير موجودة.

مثـــال 2 إيجاد نقاط الإنقلاب

حدِّد نقاط الانقلاب للدالّة $f(x)=x^4-4x^3$.

وناقش تحدّب بيانها وتقعّره.



الحل

المشتقّة الأولى للدالّة هي

$f'(x)=4x^3-12x^2$ ومشتقّتها الثانية هي

$f''(x)=12x^2-24x$. $f''(x)=0$ عند

$x=0$ و $x=2$. البيان الأحمر هو بيان المشتقّة الأولى.

يُظهر هذا البيان أن المشتقّة الأولى تتزايد على الفترة $]-\infty, 0[$ مما يدل على أن

بيان الدالّة متقعّر على هذه الفترة. من ناحية ثانية، تتناقص المشتقّة الأولى على الفترة $]0, 2[$ ممّا يدل على أن بيان الدالّة محدّب على هذه الفترة. يتحوّل بيان الدالّة من التقعّر إلى التحدّب عند النقطة $(0, 0)$، ممّا يدل على أن هذه النقطة هي نقطة انقلاب.

من ناحية ثالثة، تتزايد المشتقّة الأولى على الفترة $]2, +\infty[$ مما يدل على أن بيان الدالّة متقعّر على هذه الفترة. يتحوّل بيان الدالّة من التحدّب إلى التقعّر عند النقطة $(2, -16)$ ممّا يدل على أن هذه النقطة هي نقطة انقلاب.

لاحظ

أن للدالة مماسًّا عند $x=0$ وعند $x=2$.



2. حدِّد نقاط الانقلاب للدالّة $f(x)=-x^4+2x^3$ وناقش تحدّب بيانها وتقعّره.

بالإضافة إلى اختبار تقعّر بيان الدالّة وتحدّبه، تساعد المشتقّة الثانية على تصنيف القيم القصوى المحلّية بين قيم كبرى وقيم صغرى. يستند هذا الاختبار إلى أن تحدّب بيان الدالّة في جوار نقطة $(c, f(c))$ حيث $f'(c)=0$، يوجب على $f(c)$ أن تكون قيمة كبرى محلّية؛ كما يستند إلى أن تقعّر بيان الدالّة في جوار نقطة $(c, f(c))$ حيث $f'(c)=0$ ، يوجب على $f(c)$ أن تكون قيمة صغرى محلّية.

اختبار المشتقّة الثانية

$f(x)$ دالّة تحقّق $f'(c)=0$ وَ $f''(x)$ مُعرّفة في جوار $(c, f(c))$.

1. إذا كان $f''(c)>0$ فإن النقطة $(c, f(c))$ تمثّل قيمة صغرى محلّية للدالّة لأنها تقع في تقعّر.

2. إذا كان $f''(c)<0$ فإن النقطة $(c, f(c))$ تمثل قيمة كبرى محلّية للدالّة لأنها تقع في تحدّب.

إذا كان $f''(c)=0$ فإن الاختبار يُخفق. ينبغي في هذه الحالة، استعمال اختبار المشتقّة الأولى.

مثال 3 استعمال اختبار المشتقّة الثانية

جد القيم القصوى المحلّية للدالّة $f(x)=-3x^5+5x^3$

الحل

المشتقّة الأولى للدالّة هي

$$f'(x)=-15x^4+15x^2=15x^2\left(1-x^2\right)$$

ومشتقّتها الثانية هي $f''(x)=30\left(-2x^3+x\right)$.

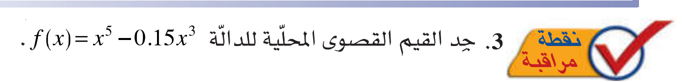
$f'(x)=0$ عندما $x=-1$ وَ $x=0$ وَ $x=1$.

تتخذ الدالّة قيمة صغرى محلّية عند $x=-1$ لأن

$$f''(-1)=30\left(-2(-1)^3+(-1)\right)=30>0$$

تتّخذ الدالّة قيمة كبرى محلّية عند $x=1$ لأن $f''(1)=30\left(-2(1)^3+(1)\right)=-30<0$.

بما أن $f''(0)=0$ ، فإن الاختبار يخفق في تحديد ما يحدث عند $x=0$. استعمل اختبار المشتقّة الأولى لتكتشف أن الدالّة تتزايد قبل $x=0$ وبعده، ممّا يدل على أنها لا تتّخذ قيمة قصوى محلّية عندها.

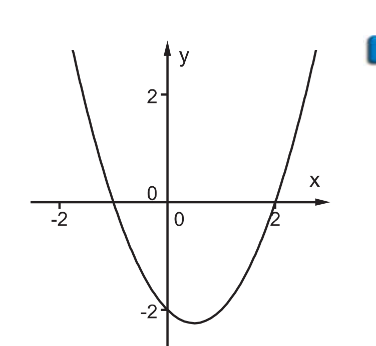


نقطة مراقبة **3**. جِد القيم القصوى المحلّية للدالّة $f(x)=x^5-0.15x^3$.

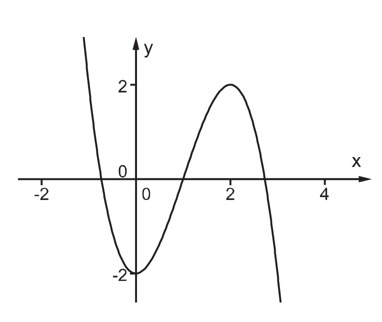
2–4 التمارين

في التمارين من 1 إلى 4، حدّد الفترات المفتوحة حيث بيان الدالّة مقعّر أو محدّب.

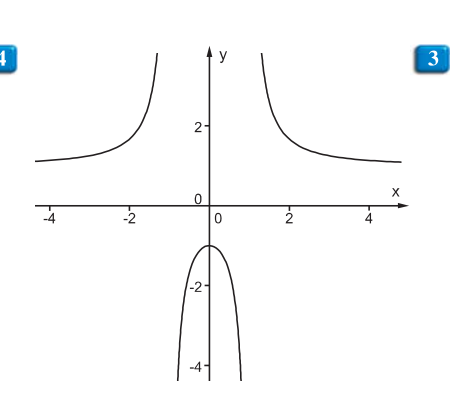
1



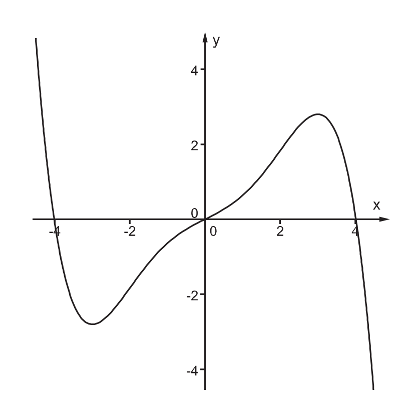
2



3



4



في التمارين من 5 إلى 11 ، جِد نقاط الانقلاب، وحدّد فترات تقعّر بيان الدالّة وفترات تحدُّبه.

5 $f(x)=x^3-6x^2+12x$

6 $f(x)=x\sqrt{x+3}$

7 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

8 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ على الفترة $[0, 4\pi]$

9 $f(x)=\dfrac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ على الفترة $[0, 4\pi]$

10 $f(x)=\sin x+\cos x$ على الفترة $[0, 2\pi]$ **11** $f(x)=x+2\cos x$ على الفترة $[0, 2\pi]$

في التمارين من 12 إلى 17 ، جِد القيم القصوى (الكبرى والصغرى) المحلّية، مستعملاً اختبار المشتقّة الثانية حيث أمكن.

12 $f(x)=x^4-4x^3+2$ **13** $f(x)=-(x-5)^2$ **14** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-3$

15 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **16** $f(x)=x+\frac{4}{x}$ **17** $f(x)=\cos x-x$

حول المفاهيم

18 f دالّة مشتقّتها دالّة متزايدة. ارسم بيانًا لِـ f عندما تكون: أ $f'<0$ ب $f'>0$

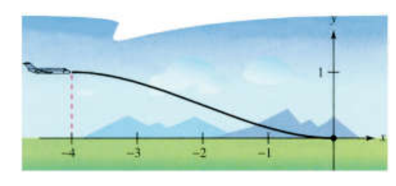
19 f دالّة مشتقّتها دالّة متناقصة. ارسم بيانًا لِـ f عندما تكون: أ $f'<0$ ب $f'>0$

20 ارسم بيان دالّة f يتضمّن نقطة $(c, f(c))$ بحيث $f''(c)=0$ ، في حين أن $(c, f(c))$ ليست نقطة انقلاب.

21 ارسم بيان الدالّة $f(x)=\sqrt[3]{x}$ وحدِّد نقطة الانقلاب بيانيًّا. هل المشتقّة الثانية $f''(x)$ معرّفة عند نقطة الانقلاب؟ وضّح جوابك.

22 جِد قيم a وَ b وَ c وَ d بحيث يكون للدالّة التكعيبية $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ قيمة كبرى محلّية عند النقطة $(3, 3)$ ، وقيمة صغرى محلّية عند النقطة $(5, 1)$ ونقطة انقلاب عند النقطة $(4, 2)$.

23 **هبوط الطائرة** باشرت طائرة صغيرة عملية الهبوط عندما كانت على ارتفاع كيلومتر واحد وعلى بعد 4 كيلومترات من مدرج المطار (انظر الشكل المقابل). جِد الدالّة التكعيبية $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ التي تُمثِّل، على الفترة $[-4, 0]$ ، مسار الطائرة خلال الهبوط.



24 بيّن التالي: إذا كانت c دالّة تكعيبية لها 3 أصفار حقيقية مختلفة، فإن لها نقطة انقلاب وأن الإحداثي x لهذه النقطة هو متوسّط الأصفار الثلاثة للدالّة.

صواب أم خطأ؟ في التمارين من 25 إلى 28 ، اذكر إن كانت المقولة صوابًا فعلِّله، أو خطأ فأثبته بمثال مضاد.

25 لبيان كل دالّة تكعيبية نقطة انقلاب واحدة.

26 بيان الدالّة $f(x)=\frac{1}{x}$ محدّب عندما $x<0$ ومقعّر عندما $x>0$ ، وله نقطة انقلاب عند $x=0$.

27 إذا كان $f'(c)>0$ ، فإن بيان f مقعّر عند $x=c$.

28 إذا كان $f''(2)=0$ ، فإن لبيان الدالّة f نقطة انقلاب عند $x=2$.

3-4 النهايات (الغايات) عند اللانهاية
Limits at Infinity

الأهداف

- يجد النهايات المحدودة عند اللانهاية.
- يجد المحاذيات الأفقية لبيان دالّة إن وجدت.
- يجد النهايات اللانهائية عند اللانهاية.

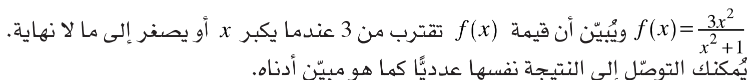
المفردات Vocabulary

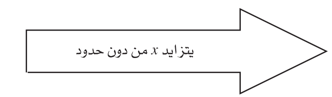
المحاذيات الأفقية Horizontal Asymptotes

المحاذيات العمودية Vertical Asymptotes

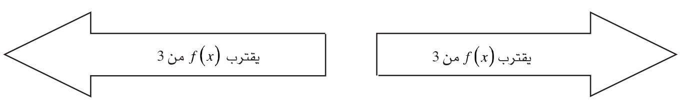
النهايات عند اللانهاية

يناقش هذا الدرس سلوك دالّة عندما يكبر x أو يصغر إلى ما لا نهاية له أو كما نعبّر عن ذلك، عندما $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$. يُظهر الرسم المقابل بيان الدالة $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$ ويُبيّن أن قيمة $f(x)$ تقترب من 3 عندما يكبر x أو يصغر إلى ما لا نهاية. يُمكنك التوصّل إلى النتيجة نفسها عدديًا كما هو مبيّن أدناه.





x	$-\infty \leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\to +\infty$
$f(x)$	$3 \leftarrow$	2.9997	2.97	1.5	0	1.5	2.97	2.9997	$\to 3$



يوحي الجدول بأن قيمة $f(x)$ تقترب من 3 عندما يتزايد x من دون حدود $(x \to +\infty)$ أو عندما يتناقص x من دون حدود $(x \to -\infty)$. نكتب هاتين النهايتين عند اللانهاية على الشكل التالي:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$ نهاية $f(x)$ عند اللانهاية السالبة

وَ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$ نهاية $f(x)$ عند اللانهاية الموجبة

المحاذيات الأفقية

رأينا، في حالة الدالّة $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$ ، أن بيان هذه الدالّة يقترب من المستقيم $y=3$ عندما يتزايد x من دون حدود. نقول عن هذا المستقيم أنه **محاذٍ أفقي** لبيان الدالّة.

تعريف المحاذي الأفقي

يكون المستقيم $y=a$ **محاذيًا أفقيًا** لبيان الدالّة $f(x)$ إذا كان $\lim_{x \to -\infty} f(x)=a$ أو $\lim_{x \to +\infty} f(x)=a$.

من ناحية أخرى، تتمتع النهايات عند اللانهاية بالخصائص نفسها التي تتمتع بها النهايات عند $x=c$ حيث c عدد حقيقي. كما أن لها خصائص إضافية مثل:

نهايات عند اللانهاية

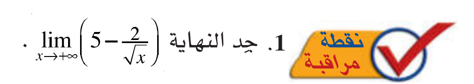
- إذا كان r عددًا نسبيًّا موجبًا، فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{c}{x^r}=0$.
- إذا كان r عددًا نسبيًّا سالبًا وكان x^r معرّفًا عند قيم x السالبة، فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r}=0$.

مثال 1 إيجاد نهاية عند اللانهاية

جِد النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)$.

الحل يُمكنك أن تكتب بالاستناد إلى خصائص النهايات وإلى المبرهنة السابقة:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}5-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=5-0=5$$



نقطة مراقبة **1.** جِد النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

مثال 2 إيجاد نهاية عند اللانهاية

جِد النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}$.

الحل لاحظ أن كلاً من البسط والمقام يتّجه نحو $+\infty$ عندما يتزايد x بشكل غير محدود.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)}\to\frac{+\infty}{+\infty}$$

إنها حالة من حالات عدم التعيين. لحل هذه المسألة، أي لرفع عدم التعيين، اقسم كلاً من البسط والمقام على x .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{2-0}{1+0}=2$$

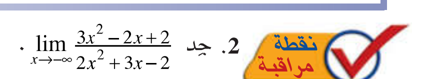
x→+∞ عندما f(x)→2

x→-∞ عندما f(x)→2

وهكذا، فإن المستقيم $y=2$ محاذٍ أفقي للدالّة من اليمين. إذا بحثت عن نهاية الدالّة عندما يتناقص x من دون حدود، فستجد أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2$ وأن المستقيم $y=2$ هو أيضًا محاذٍ أفقي للدالّة من اليسار.

فائدة

عندما تواجه صيغة غير معيَّنة كما في المثال 2 ، اقسم البسط والمقام على أعلى قوة لـ x موجودة في المقام.



نقطة مراقبة **2.** جِد $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}$.

مثـــــال 3 مقارنة ثلاث دوال نسبية

جِد كلاً من النهايات الثلاث التالية:

أ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5}{3x^2+1}$ **ب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+5}{3x^2+1}$ **ج** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+5}{3x^2+1}$

الحـل

أ اقسم كلاً من البسط والمقام على x^2 .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{0+0}{3+0}=0$$

ب اقسم كلاً من البسط والمقام على x^2 .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

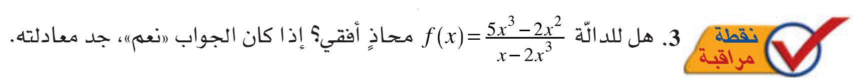
ج اقسم كلاً من البسط والمقام على x^2 .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

تستنتج أن النهاية الثالثة لا نهائية، لأن البسط يتزايد من دون حدود، في حين أن المقام ثابت لا يتغيّر.

تحديد المحاذيات الأفقية للدوال النسبية عندما لا يكون للبسط والمقام عامل مشترك

1. إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، فإن المستقيم $y=0$ محاذٍ أفقي للدالّة.
2. إذا تساوت درجة البسط ودرجة المقام، فإن المستقيم $y=\frac{a}{b}$ ، حيث a هو المعامل الرئيس للبسط وَ b المعامل الرئيس للمقام، هو محاذٍ أفقي للدالّة.
3. إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فليس للدالّة محاذٍ أفقي.



نقطة مراقبة **3.** هل للدالّة $f(x)=\dfrac{5x^3-2x^2}{x-2x^3}$ محاذٍ أفقي؟ إذا كان الجواب «نعم»، جد معادلته.

لاحظت في الأمثلة السابقة الأمر التالي: إذا كان المستقيم $y=a$ محاذيًا أفقيًّا للدالّة من اليمين، فهو أيضًا محاذٍ لها من اليسار. يصح هذا الأمر في كل الدوال النسبية. لكنه لا يصح في دوال أخرى، كما يُبيّن المثال 4.

مثـــــال 4 دالّة لها محاذيان أفقيان مختلفان

جد كلاً من النهايتين التاليتين، واستنتج معادلتي المحاذيين الأفقيين لبيان الدالّة $y=\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$.

أ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

ب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

الحـل

أ إذا كان $x>0$ يُمكنك أن تكتب $x=\sqrt{x^2}$. فإذا قسمت البسط والمقام على x تحصل على

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3-0}{\sqrt{2+0}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

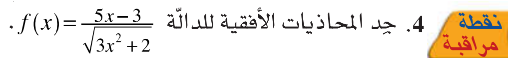
إذن $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ هو محاذٍ أفقي من جهة اليمين.

ب إذا كان $x<0$ يُمكنك أن تكتب $x=-\sqrt{x^2}$. فإذا قسمت كلاً من البسط والمقام على x تحصل على:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{3-0}{\sqrt{2+0}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

إذن $y=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$ هو محاذٍ أفقي من جهة اليسار.

نقطة مراقبة



4. جد المحاذيات الأفقية للدالّة $f(x)=\frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2}}$.

الغايات اللانهائية $\pm\infty$

هناك كثير من الدوال التي لا تقترب قيمها من نهاية محدودة عندما يتزايد x أو يتناقص من دون حدود. من هذه الدوال، الدوال الحدودية. تُستعمل التعريفات أدناه لوصف سلوك الدوال الحدودية أو غيرها عند $\pm\infty$.

تعريف الغايات اللانهائية عند $\pm\infty$

1. تُعبّر الكتابة $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ عن أن قيمة $f(x)$ تتزايد من دون حدود عندما يتزايد x من دون حدود.
2. تُعبّر الكتابة $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ عن أن قيمة $f(x)$ تتناقص من دون حدود عندما يتزايد x من دون حدود.

يتم تعريف الكتابتين $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ بطريقة مشابهة.

مثـــال 5 إيجاد نهايات لا نهائية عند $\pm\infty$

جد كلاً من النهايتين التاليتين:

أ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ **ب** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$

الحل

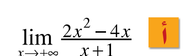
أ عندما يتزايد x من دون حدود، فإن x^3 يتزايد من دون حدود، مما يؤدي إلى $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

ب عندما يتناقص x من دون حدود، فإن x^3 يتناقص من دون حدود، مما يؤدي إلى $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$. يؤيّد بيان الدالّة $f(x)=x^3$ ، هذه النتائج.

نقطة مراقبة **5.** جد كلاً من النهايتين التاليتين: أ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ ب $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$

مثـــال 6 إيجاد نهايات لا نهائية عند $\pm\infty$

جد كلاً من النهايتين التاليتين:



أ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}$

ب $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}$

الحل

ابدأ بقسمة البسط على المقام:

$$\frac{2x^2-4x}{x+1}=2x-6+\frac{6}{x+1}$$

أ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-6+\frac{6}{x+1}\right)=+\infty$

ب $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-6+\frac{6}{x+1}\right)=-\infty$

تُظهر هذه النتائج أن سلوك الدالّة $f(x)=\frac{2x^2-4x}{x+1}$ عند $\pm\infty$ هو نفسه سلوك الدالّة $g(x)=2x-6$. سوف تتعلّم في الدرس اللاحق أن هذا الأمر يوصف بيانيًّا بالقول إن المستقيم $y=2x-6$ محاذٍ مائل لبيان الدالّة كما يُبيّن ذلك الرسم أعلاه.



6. جد كلاً من النهايتين التاليتين: أ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^2-x+1}{x-1}$ ب $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}$

مثـــال 7 إيجاد نهايات دوال مثلثية عند $\pm\infty$

جد كلاً من النهايتين التاليتين:

أ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ ب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$

الحـل

أ عندما تتزايد قيمة x باتجاه $+\infty$ ، تتردد قيمة الدالّة $\sin x$ بين -1 وَ 1 باستمرار.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ غير موجودة.

ب بما أن $-1 \le \sin x \le 1$ وبما أن $x > 0$ عندما يسعى إلى $+\infty$ ، فإن $\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$. غير أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. إذن، وبالاستناد إلى مبرهنة السندويج، فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ كما يؤكّد ذلك الرسم المقابل.



نقطة مراقبة 7. جد كلاً من النهايتين التاليتين: أ $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ ب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$

3-4 التمـاريـن

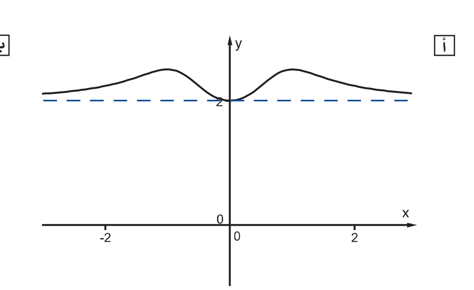
في التمرينين 1 وَ 2، وضّحْ بأسلوبك:

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$

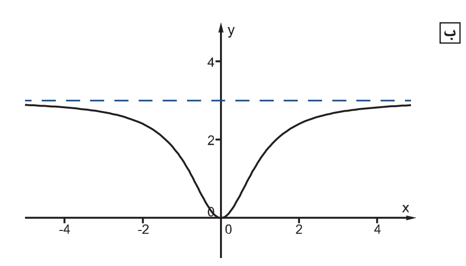
2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

في التمارين من 3 إلى 6، حدّد بيان الدالّة مستعملاً المحاذيات الأفقية كدليل.

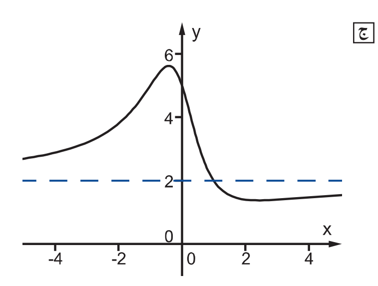
أ



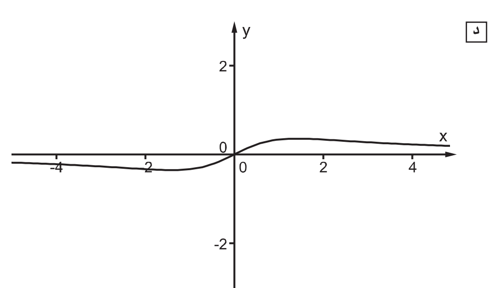
ب



ج



د



3 $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$

4 $f(x)\frac{3x^2}{x^2+2}$

5 $f(x)=\frac{2x^2-3x+5}{x^2+1}$

6 $f(x)=2+\frac{x^2}{x^4+1}$

7 جِد كلاًّ من النهايات التالية حيث $f(x)=5x^3-3x^2+10$

أ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$ ب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}$ ج $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^4}$

في التمارين من 8 إلى 15، جِد النهاية المطلوبة.

8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x+2}$

9 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2}{9x^3-3x^2+7}$

10 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x+3}$

11 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x-\frac{4}{x^2}\right)$

12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

13 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}$

14 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+\sin x}$

15 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin 2x}{x}$

حول المفاهيم

16 f دالّة مستمرة تُحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5$. جِد، إن أمكن، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ في كل من الحالتين التاليتين:

أ بيان الدالة f متناظر بالنسبة إلى المحور y .

ب بيان الدالة f متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل.

في التمارين من 17 إلى 22، حدّد التقاطعات مع محوري الإحداثيات والتناظر والمُحاذيات.

17 $f(x)=\frac{2+x}{1-x}$

18 $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$

19 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$

20 $f(x)=2-\frac{3}{x^2}$

21 $f(x)=3+\frac{2}{x}$

22 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

صواب أم خطأ؟ حدّد في التمرينين 23 وَ 24، إن كانت المقولة صوابًا فعلّله، أو خطأ فأثبته بمثال مضاد.

23 إذا كانت $f'(x)>0$ أيًّا تكن قيمة x ، فإن الدالّة f تتزايد من دون حدود.

24 إذا كانت $f'(x)<0$ أيًّا تكن قيمة x ، فإن الدالّة f تتناقص من دون حدود.





1-4 تزايد الدوال وتناقصها

1 حدّد فترات تزايد كل دالّة وفترات تناقصها.

أ $f(x)=x^3-x$ ب $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ ج $f(x)=x+\cos 2x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

2-4 القيم القصوى

2 أنشئ جدول التغيُّرات لكل من الدوال التالية، وحدّد قيمها الكبرى وقيمها الصغرى المحلّية.

أ $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$ ب $f(x)=\sin^2 x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

2-4 نقاط الانقلاب

3 حدّد نقاط الانقلاب لكل من الدوال التالية وحدّد الفترات المفتوحة حيث الدالّة محدّبة وحيث هي مقعّرة.

أ $f(x)=2x^3-3x^2$ ب $f(x)=2\cos(\pi x)\quad(0\le x\le 2)$

4 جد قيمة كل من a وَ b وَ c علمًا بأن الدالّة $f(x)=ax^3+bx^2+c$ لها نقطة انقلاب عند $x=-1$، ومماس معادلته $y=-3x-4$.

5 اذكر إن كانت المقولة صوابًا فعلِّله، أو خطأ فأثبته بمثال مضاد.

أ النقطة $(1, 0)$ هي نقطة انقلاب للدالّة $f(x)=(x-1)^4$.

ب إذا كان $f''(c)>0$، فإن ميل مماسّ بيان الدالّة عند $x=c$ موجب.

3-4 النهايات اللانهائية

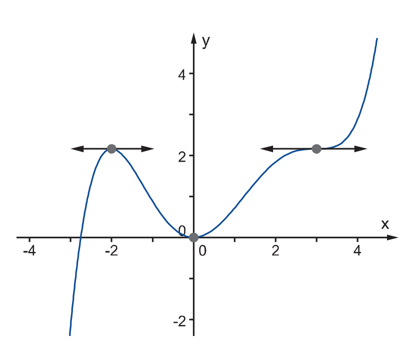
6 جد كل نهاية.

أ $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-2x)^2}{2x^2+1}$ ب $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x^2}-1+3x\right)$ ج $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x-1}{|x-2|}$

3-4 جدول التغيّر

7 يُبيّن الرسم أدناه بيان دالة $f(x)$. أكمل الجدول أدناه مستعملاً أحد الرموز: +، −، 0.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$x=-2$			
$x=0$			
$x=3$			
$x=-3$			
$x=4$			



4-4 رسم بيانات الدوال
Curve Sketching

الأهداف

- يحلّل دالّة ويرسم بيانها.

المفردات Vocabulary

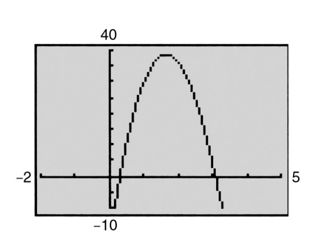
محاذٍ مائل Slant Asymtote

تحليل بيانات الدوال

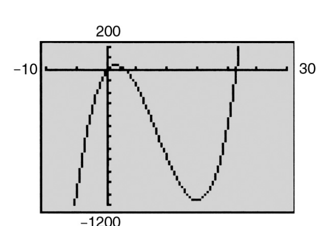
من الصعوبة بمكان أن تتجاهل أهمية استعمال بيانات الدوال في الرياضيات. ساهمت الهندسة التحليلية، التي أدخلها العالم الفرنسي ديكارت، بشكل ملموس في التطوّر السريع لحساب التفاضل والتكامل الذي شهدت أواسط القرن السابع عشر بداياته. وقد عبّر عالم الرياضيات الفرنسي لاغرانج Lagrange عن هذا الأمر بقوله «عندما كان كل من الجبر والهندسة يسبح في فلكه الخاص، كان تقدُّم كل منهما بطيئًا وتطبيقاته قليلة. شكّل التقاؤهما مناسبة لكل منهما أن يتغذى من حيوية الآخر، وأن يُكملا مسيرة مشتركة نحو الكمال».

تعلمت حتى الآن كثيرًا من المفاهيم التي تساعد على تحليل بيانات الدوال.

- التقاطعات مع محوري الإحداثيات.
- التناظر.
- المجال والمدى (في بعض الحالات).
- الاستمرارية.
- الاشتقاق.
- القيم القصوى المحلية.
- نقاط الانقلاب.
- المحاذيات.
- النهايات عند اللانهاية.



عندما ترسم بيان دالّة، باليد (أو باستعمال حاسبة بيانية)، تذكّر أنك ترسم جزءًا من البيان، وأنك لا تستطيع أن ترسمه كاملاً. قرارك بتحديد أي جزء من البيان تقوم برسمه قرار مهم. انظر الرسمين المقابلين. أيُّهما برأيك يمثّل بشكل أفضل الدالّة $f(x)=x^3-25x^2+74x-2$ ؟



من الواضح أن الرسم الثاني يُمثّل الدالّة بشكل أفضل. لكن هل هناك رسم ثالث يُظهر أجزاء مهمة من بيان الدالّة؟ للإجابة عن هذا السؤال، يلزمك استعمال حساب التفاضل لكي تفسّر المشتقّة الأولى والمشتقّة الثانية للدالّة.

فيما يلي توجيهات لكي تحدِّد جيدًا جزء بيان الدالّة الذي تُظهره برسمك. يجب أن يبيّن هذا الجزء العناصر الواردة في هذه التوجيهات.

توجيهات لتحليل بيان الدالّة

1. حدِّد مجال الدالّة.
2. حدِّد تقاطعات الدالّة مع محوري الإحداثيات والمحاذيات والتناظر.
3. حدِّد قيم x التي تجعل $f'(x)$ وَ $f''(x)$ تساوي 0 أو غير موجودة. استعمل هذه النتائج لتحديد القيم القصوى المحلّية للدالّة ونقاط انقلابها.

مثـــال 1 رسم بيان دالّة نسبية

ارسم بيان الدالّة $f(x)=\dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$.

الحـل

المشتقّة الأولى:

$$f'(x)=\frac{2(2x)(x^2-4)-2(x^2-9)(2x)}{(x^2-4)^2}=\frac{20x}{(x^2-4)^2}$$

المشتقّة الثانية:

$$f''(x)=\left[\frac{20x}{(x^2-4)^2}\right]'=\frac{20(x^2-4)^2-20x\times2(2x)(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

$$=\frac{20x^2-80-80x^2}{(x^2-4)^3}=\frac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

التقاطعات الأفقية: $f(x)=0$ عندما $x^2-9=0$ أي عندما $x=\pm3$. نقطتا تقاطع أفقي: $(-3,0)$ وَ $(3,0)$.

التقاطعات العمودية:هناك نقطة عمودي واحدة: $(0,f(0))=\left(0,\frac{9}{2}\right)$

المُحاذيات العمودية: لإيجاد المُحاذيات العمودية، حُل $x^2-4=0$ فتحصل على $x=\pm2$.

مُحاذيان عموديان $x=-2$ وَ $x=2$

المحاذيات الأفقية: بما أن للبسط والمقام الدرجة نفسها فإن المحاذي الأفقي هو $y=\frac{2}{1}=2$

القيم الحرجة: هناك قيمة واحدة تجعل المشتقة تُساوي 0. إنها $x=0$.

نقاط الإنقلاب : لا توجد لأن $f''(x)\neq0$ أيا كانت قيمة x في مجال الدالة.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء تلك التي تُحوّل المقام إلى 0. إنها $x=-2$ وَ $x=2$

التناظر: بيان الدالة متناظر بالنسبة للمحور y لأن الدالة زوجية

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2-9}{(-x)^2-4}=\frac{2(x^2-9)}{x^2-4}=f(x)$$

فترات الاختبار وقيمه : $]-\infty,-2[$ ، -2 ، $]-2,0[$ ، 0، $]0,2[$ ، 2، $]2,+\infty[$. تُلخص الجداول كيفية استعمال فترات الاختبار وقيمه لتحديد خصائص بيان الدالة الظاهر أعلاه.

جدول المُشتقة الأولى

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	غير معرّف	$-$	0	$+$	غير معرّف	$+$
$f(x)$	↘		↘	$\frac{9}{2}$	↗		↗

جدول المُشتقة الثانية

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	غير معرّف	$-$	0	$-$	غير معرّف	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$	$\frac{9}{2}$	$\cup$		$\cap$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	خاصّية البيان
$-\infty < x < -2$		$-$	$-$	متناقص، محدّب
$x = -2$	غير معرّف	غير معرّف	غير معرّف	محاذٍ عمودي
$-2 < x < 0$		$-$	$+$	متناقص، متقعّر
$x = 0$	4.5	0	$+$	قيمة صغرى محلّية
$0 < x < 2$		$+$	$+$	متزايد، متقعّر
$x = 2$	غير معرّف	غير معرّف	غير معرّف	محاذٍ عمودي
$2 < x < +\infty$		$+$		متزايد، محدّب

نقطة مراقبة **1.** ارسم بيان الدالّة $f(x) = \frac{3(x-2)}{x^2-1}$.

مثـــــال 2 رسم بيان دالّة نسبية

ارسم بيان الدالّة $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$.

الحل

المشتقّة الأولى: $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

المشتقّة الثانية: $f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$

التقاطعات الأفقية: لا يوجد

التقاطعات العمودية: $(0, -2)$

المحاذيات العمودية: $x = 2$

المحاذيات الأفقية: لا يوجد

القيم الحرجة: $x = 0$ ، $x = 4$

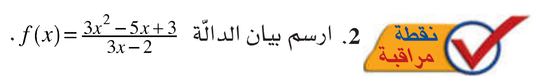
نقاط الانقلاب: لا يوجد

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $x = 2$

فترات الاختبار وقيمه: $]-\infty, 0[$ ، 0 ، $]0, 2[$ ، 2 ، $]2, 4[$ ، 4 ، $]4, +\infty[$

يُبيّن الجدول كيفية استعمال فترات وقيم الاختبار لتحديد خصائص بيان الدالّة.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	خاصّية البيان
$-\infty < x < 0$		$+$	$-$	متزايد، محدّب
$x = 0$	-2	0	$-$	قيمة كبرى محلّية
$0 < x < 2$	$-$	$-$	$-$	متناقص، محدّب
$x = 2$	غير معرّف	غير معرّف	غير معرّف	محاذٍ عمودي
$2 < x < 4$		$-$	$+$	متناقص، مقعّر
$x = 4$	6	0	$+$	قيمة صغرى محلّية
$4 < x < +\infty$		$+$	$+$	متزايد، مقعّر



نقطة مراقبة **2.** ارسم بيان الدالّة $f(x)=\frac{3x^2-5x+3}{3x-2}$.

المُحاذيات المائلة

في المثال 2، ليس لبيان الدالّة محاذٍ أفقي، لكن له محاذيًا مائلاً. لبيان الدالّة النسبية (التي لا عوامل مشتركة بين بسطها ومقامها، ودرجة مقامها لا تقل عن 1) محاذٍ مائل إذا زادت درجة البسط على درجة المقام 1 فقط. لإيجاد المحاذي المائل، استعمل القسمة المطوّلة لكتابة معادلة الدالّة كمجموع حدودية من الدرجة الأولى ودالّة نسبية أخرى درجة بسطها أقل من درجة مقامها.

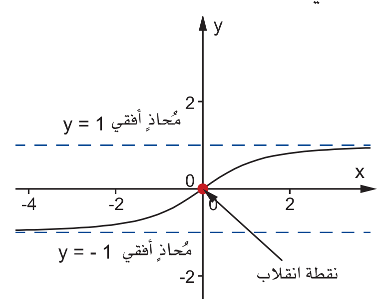
$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}$ اكتب معادلة الدالّة

$f(x)=x+\frac{4}{x-2}$ أعد كتابتها بعد إجراء القسمة

يُلخّص البيان المقابل معطيات الجدول أعلاه والمحاذي المائل $y=x$.

مثــــال 3 رسم بيان دالّة جذرية

ارسم بيان الدالّة $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.



الحل

$f'(x)=\frac{2}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$ ، $f''(x)=-\frac{6x}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$

للبيان تقاطع واحد هو النقطة $(0, 0)$. ليس له محاذيات عمودية بينما له محاذيان أفقيان: $y=-1$ وَ $y=1$. ليس للدالّة قيم حرجة. وهناك احتمال أن يكون لها نقطة انقلاب واحدة (عند $x=0$).
مجال الدالّة هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها، وبيانها متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل.

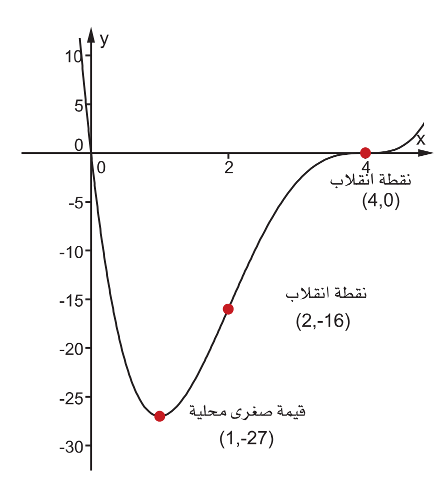
x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	خاصيّة البيان
$-\infty<x<0$		+	+	متزايد، مقعّر
$x=0$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	نقطة انقلاب
$0<x<+\infty$		+	−	متزايد، محدّب

نقطة مراقبة **3.** ارسم بيان $f(x)=\frac{-2x}{\sqrt{x^2+2}}$.

مثـــال 4 رسم بيان دالّة حدودية

ارسم بيان الدالّة $f(x)=x^4-12x^3+48x^2-64x$.

الحل



المشتقة الأولى: $f'(x)=4(x-1)(x-4)^2$

المشتقة الثانية: $f''(x)=12(x-4)(x-2)$

التقاطعات الأفقية: $(0,0)$ وَ $(4,0)$

التقاطعات العمودية: $(0,0)$

المحاذيات العمودية: لا توجد

المحاذيات الأفقية: لا توجد

السلوك عند $\pm\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

القيمتان الحرجتان: $x=1$ وَ $x=4$

نقاط الانقلاب الممكنة: $x=2$ وَ $x=4$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

فترات الاختبار وقيمه: $]-\infty,1[$ ، 1 ، $]1,2[$ ، 2 ، $]2,4[$ ، 4 ، $]4,+\infty[$

خاصيّة البيان	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	x
متناقص، مقعّر	+	−		$-\infty<x<1$
قيمة صغرى محلّية	+	0	−27	$x=1$
متزايد، مقعّر	+	+		$1<x<2$
نقطة انقلاب	0	+	−16	$x=2$
متزايد، محدّب	−	+		$2<x<4$
نقطة انقلاب	0	0	0	$x=4$
متزايد، مقعّر	+	+		$4<x<+\infty$

للدالّة الحدودية في المثال 4، قيمة صغرى محلّية واحدة وليس لها قيم كبرى محلّية. بصورة عامّة، يُمكن لدالّة حدودية من الدرجة n أن يكون لها $n-1$ قيمة قصوى محلّية على الأكثر وَ $n-2$ نقطة انقلاب على الأكثر. يُضاف إلى ذلك، أن الدوال الحدودية الزوجية الدرجة لها قيمة قصوى محلية على الأقل.

تذكر ما تعلمته عن الدوال الحدودية في الصف العاشر. تذكر أن سلوك الدالّة عند اللانهاية يتحدَّد بدرجة الدالّة وبإشارة المعامل الرئيس. فبيان دالّة المثال 4 ، يتزايد من دون حدود مع الاقتراب من $+\infty$ لأن معامله الرئيس موجب. وهو يتزايد من دون حدود مع الاقتراب من $-\infty$ لأن درجته زوجية.



نقطة مراقبة **4.** ارسم بيان $f(x)=5x^3-15x$.

مثـــال 5 رسم بيانات الدوال المثلّثية

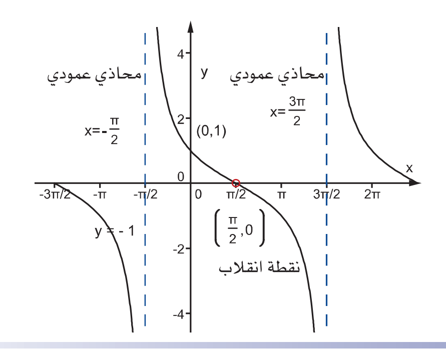
ارسم بيان $f(x)=\frac{1-\sin x}{\cos x}$.

الحل

بما أن الدالة دورية ودورتها 2π ، تستطيع حصر دراستها في فترة طولها 2π . اختر الفترة.
$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

- المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ حيث $n\in\mathbb{Z}$
- المشتقّة الأولى: $f'(x)=\frac{\sin x-1}{\cos^2 x}$
- المشتقّة الثانية: $f''(x)=\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^3 x}$
- الزمن الدوري: 2π
- التقاطعات الأفقية: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
- التقاطعات العمودية: $(1, 0)$
- المحاذيات العمودية $x=-\frac{\pi}{2}$ وَ $x=\frac{3\pi}{2}$
- المحاذيات الأفقية: لا يوجد القيم الحرجة: لا يوجد
- نقاط الانقلاب الممكنة: $x=\frac{\pi}{2}$
- فترات الاختبار وقيمه: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

خاصيّة البيان	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	x
محاذٍ عمودي	غير معرّف	غير معرّف	غير معرّف	$x=-\frac{\pi}{2}$
متناقص، مقعّر	+	−		$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$
غير مُعرّف	0	$-\frac{1}{2}$	غير معرّف	$x=\frac{\pi}{2}$
متناقص، محدّب	−	−		$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$
محاذٍ عمودي	غير معرّف	غير معرّف	غير معرّف	$x=\frac{3\pi}{2}$

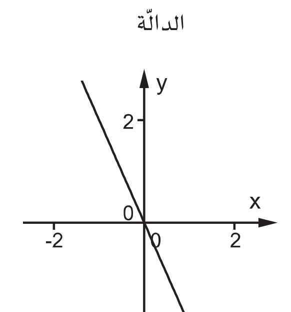



نقطة مراقبة 5. ارسم بيان $f(x)=\frac{1+\cos x}{\sin x}$.

4-4 التمـــارين

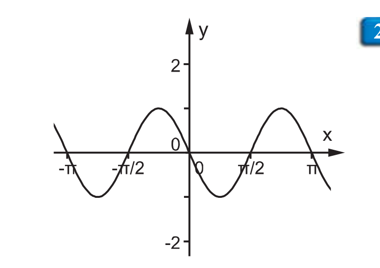
حدِّد بيان المشتقّة لكل دالّة.

1 الدالّة

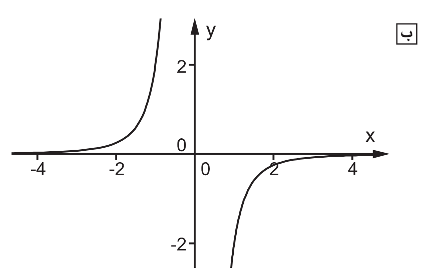


أ المشتقّة

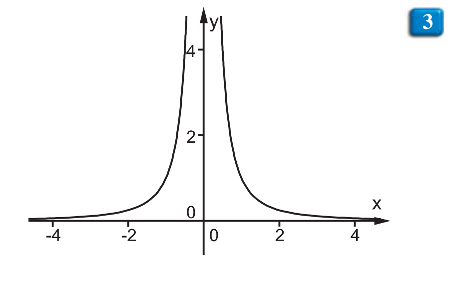
2



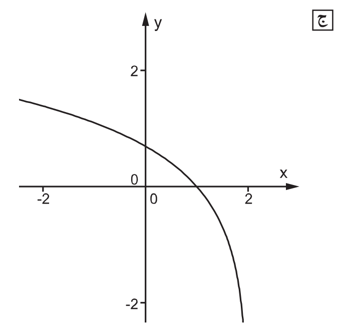
ب



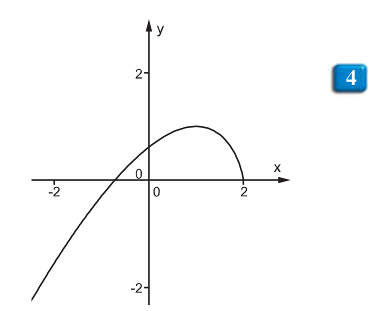
3



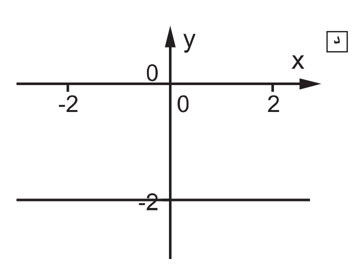
ج



4



د

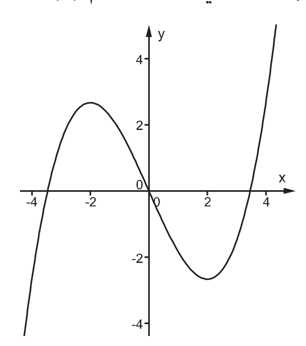


GRADE12-CHAPTER 4 2013-final 2/12/15 2:20 PM Page 33

5 **قراءة بيانية** يُظهر الرسم أدناه بيان الدالّة f.

أ أي قيم لـ x تجعل قيمة $f'(x)$ تساوي 0؟ تجعل قيم $f'(x)$ موجبة؟ سالبة؟

ب أي قيم لـ x تجعل قيمة $f''(x)$ تساوي 0؟ تجعل قيم $f''(x)$ موجبة؟ سالبة؟



ج على أي فترة تكون المشتقّة $f'(x)$ متزايدة؟

د أي قيمة لـ x تجعل $f'(x)$ تتّخذ قيمتها الصغرى؟ قارن بين معدّل تغيّر f عند هذه القيمة، ومعدّل تغيّر f عند القيم الأخرى لـ x . أوضح جوابك.

في التمارين من 6 إلى 14، ارسم بيان الدالّة.

6 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$

7 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-9}$

8 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

9 $f(x)=\frac{x^2-6x+12}{x-4}$

10 $f(x)=2-x-x^3$

11 $f(x)=3x^4+4x^3$

12 $f(x)=|2x-3|$

13 هل يُمكن لبيان دالّة أن يقطع أحد محاذياتها العمودية؟ وضّح جوابك.

14 هل يُمكن لبيان دالّة أن يقطع أحد محاذياتها الأفقية؟

15 توحي معادلة الدالّة $f(x)=\frac{6-2x}{x-3}$ أن لها محاذيًا عموديًا. ما معادلته؟ ارسم بيان هذه الدالّة وتحقّق من أنها لا تملك محاذيًا عموديًا. كيف تفسّر الأمر؟

فكّر في التمرينين 16 وَ 17 ، جِد دالّة تستجيب للشروط المعيّنة.

16 للدالّة محاذٍ عمودي معادلته $x=5$ ومحاذٍ أفقي معادلته $y=0$.

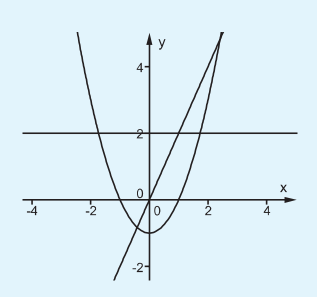
17 للدالّة محاذٍ عمودي معادلته $x=5$ وَمحاذٍ مائل معادلته $y=3x+2$.

حول المفاهيم

في التمرينين 18 و 19، يُظهر الرسم بيانات دالّة $f(x)$ ومشتقّتها الأولى $f'(x)$ ومشتقّتها الثانية $f''(x)$. ميّز بيان الدالّة وبيان مشتقّتها الأولى وبيان مشتقّتها الثانية.

18

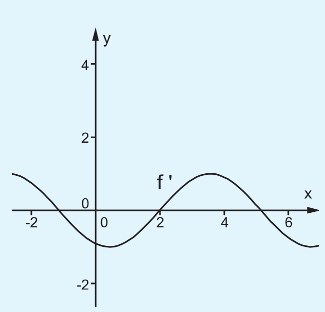
19



في التمرينين 20 و 21 ارسم بيان الدالّة $f(x)$ مستعينا ببيان مشتقّتها الأولى $f'(x)$.

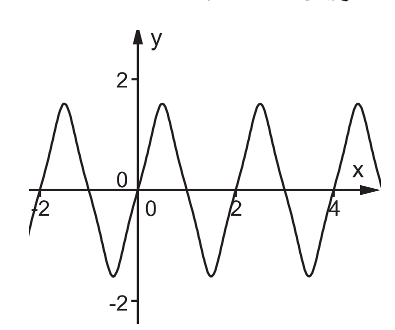
20

21



22 افترض أن $f'(x) < 0$ على مدى الفترة $]2, 8[$. أوضح لماذا $f(3) > f(5)$.

23 **قراءة بيانية** البيان أدناه هو بيان دالّة $f(x)$.



أ هل البيان متناظر؟ حدّد التناظر إذا كان كذلك.

ب هل الدالّة دورية؟ حدّد زمنها الدوري إذا كانت كذلك.

ج حدِّد القيم القصوى للدالّة في الفترة $]-1, 1[$.

د هل ترى نقاط انقلاب للدالّة في الفترة $]0, 1[$ ؟ ما عددها؟

5-4 البحث عن الحلول المُثلى (الأَمْثَلية) Optimization

الأهداف

- يحل مسائل تحديد قيم صغرى أو قيم كبرى.

مسائل القيم الصغرى والقيم الكبرى

من أهم تطبيقات حساب التفاضل حل مسائل القيم الصغرى والقيم الكبرى. لا شك أنك سمعت تعابير مثل الأكثر ربحًا أو الأقلّ كلفة وغيرها. قبل التوسُّع في الأمر توقَّف عند المثال التالي:

مثـــال 1 تحديد العلبة الأكبر حجمًا

يعمل أحد المهندسين في أحد المصانع على تصميم علبة مفتوحة من أعلى وقاعدتها مربعة على أن تكون مساحتها $675cm^2$ كما هو مبيّن في الشكل إلى اليمين. أي قياسات يجب أن يختار لكي يكون حجم العلبة هو الأكبر؟




الحـل

بما أن قاعدة العلبة مربعة، فإن حجمها $V = x^2h$. تُسمّى هذه المعادلة المعادلة الأولية للمسألة، لأنها توفّر صيغة لحساب ما يتوجّب إيجاد قيمته الكبرى. من ناحية أخرى، مساحة العلبة هي مساحة القاعدة يُضاف إليها مساحة الوجوه الجانبية الأربعة أي $S = x^2 + 4xh$. لكن ينبغي أن تساوي مساحة العلبة $675cm^2$ ممّا يولِّد علاقة بين ضلع القاعدة x وارتفاعها h :

$$S = x^2 + 4xh = 675$$

ينتج من ذلك $h = \frac{675-x^2}{4x}$ وَ $V = x^2\left(\frac{675-x^2}{4x}\right) = \frac{675}{4}x - \frac{x^3}{4}$

قبل الانطلاق إلى تحديد قيم x التي تؤمِّن الحجم الأكبر، حدِّد مجال المنفعة، أي القيم التي يُمكن أن يتّخذها x. تعرف أن x غير سالب، وأن مساحة القاعدة x^2 لا تتجاوز 675 ،إذا $0 < x \leq \sqrt{675}$.

لكي يحصل المهندس على الحجم الأكبر عليه إيجاد قيم x التي تجعل الدالّة $V(x) = \frac{675x-x^3}{4}$ تتّخذ قيمة كبرى. من أجل ذلك، ابدأ بإيجاد المشتقّة $V'(x)$ وحل المعادلة $V'(x) = 0$.

$$V'(x) = \frac{675-3x^2}{4} = 0$$

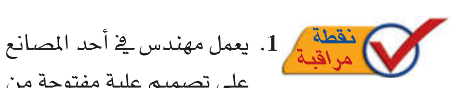
$$3x^2 = 675$$

$$x^2 = 225$$

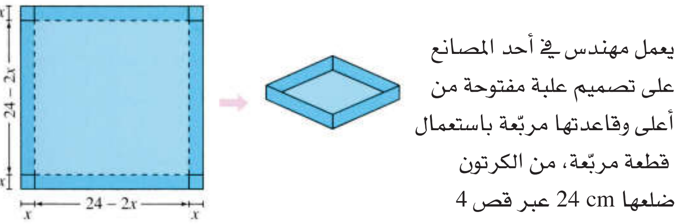
$x = -15$ أو $x = 15$

القيمتان الحرجتان هما $x = -15$ وَ $x = 15$. عليك أن تُهمل القيمة $x = -15$ لأن x غير سالب.
للتأكّد من أن القيمة الحرجة $x = 15$ تعود إلى قيمة كبرى للدالّة، استعمل اختبار المشتقّة الثانية.
المشتقّة الثانية للدالّة هي $V''(x) = -\frac{3}{2}x$ وَ قيمتها عند $x = 15$ هي
$V''(15) = -\frac{3}{2}(15) = -\frac{45}{2} < 0$ ، إذن تعود هذه النقطة الحرجة إلى قيمة كبرى محلّية للدالّة.

يختار المهندس ضلع القاعدة 15 cm وارتفاع العلبة $h = \frac{675-15^2}{4\times15} = 7.5\ \text{cm}$. الحجم الأكبر هو $V_{max} = 15\times15\times7.5 = 1687.5\text{cm}^3$.



1. يعمل مهندس في أحد المصانع على تصميم علبة مفتوحة من أعلى وقاعدتها مربّعة باستعمال قطعة مربّعة، من الكرتون ضلعها 24 cm عبر قص 4 مربعات، عند الزوايا، ضلع الواحد منها x ، ثم طي الجوانب. أي قيمة لـ x ينبغي أن يختار لكي يكون حجم العلبة أكبر ما يُمكن؟



بالعودة إلى المثال 1، عليك أن تعرف، قبل المباشرة بالحل، أن علبًا كثيرة مساحتها 675cm^2 . ابدأ بالتساؤل عن هيئة العلبة التي لها الحجم الأكبر: هل هي مرتفعة أم قليلة الارتفاع أم قريبة من المكعّب؟

ربما كان من المفيد أن تبدأ بحساب حجوم عدد من العلب، كما هو مبيّن في الصور أدناه، لكي تتكوّن لديك فكرة تقريبية عن الحل. تذكّر أنك لن تكون قادرًا على البدء بحل المسألة إن لم تُدرك ما هو المطلوب.



فيما يلي خطوط عامّة لما ينبغي أن تقوم به لتحلّ مثل هذه المسألة.

لحل مسألة من مسائل القيم القصوى:

1. حدِّد جميع القيم المعطاة وجميع القيم المطلوب إيجادها. ارسم مخطّطًا إن أمكن.

2. اكتب معادلة أوّلية للكمية التي عليك أن تحسب قيمة قصوى لها.

3. أعد كتابة المعادلة الأوّلية بحيث لا تتضمّن المعادلة الجديدة إلا متغيّرًا حرًّا واحدًا. قد يلزمك استعمال معادلات ثانوية تربط بين المتغيّرات الحرة في المعادلة الأوّلية.

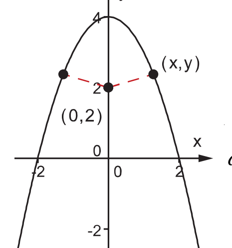
4. حدِّد فترة المنفعة للمعادلة الأوّلية، أي حدِّد قيم المتغيّرات التي تجعل المسألة ذات معنى.

5. حدِّد القيمة الكبرى أو القيمة الصغرى المطلوبة باستعمال تقنيات حساب التفاضل التي تعلمتها في الدروس السابقة.

مثـــــال 2 إيجاد المسافة الأقصر

جِد نقاط القطع المكافئ $f(x) = 4 - x^2$ الأقرب إلى النقطة $(0, 2)$.

الحل



يُظهر الرسم المقابل أن هناك نقطتين على القطع المكافئ تبعدان أقل مسافة ممكنة عن النقطة $(0, 2)$. ابدأ بحساب المسافة بين النقطة $(0, 2)$ ونقطة $(x, f(x))$ على القطع المكافئ.

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + \left(4 - x^2 - 2\right)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

بما أن d تتّخذ أقل قيمة لها عندما يتّخذ المقدار المجذور أقل قيمة له، فلتجد القيم الحرجة للدالّة $g(x) = x^4 - 3x^2 + 4$.

جِد مشتقّة الدالّة g ثم حُلّ المعادلة $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = 4x^3 - 6x = 2x\left(2x^2 - 3\right)$$

$$2x\left(2x^2 - 3\right) = 0$$

$$x = -\sqrt{\tfrac{3}{2}},\quad x = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\ ،\ x = 0$$

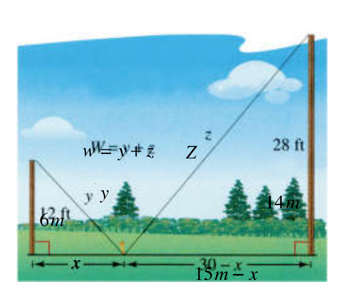
x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

يُبيّن الجدول أن النقطتين الحرجتين $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ وَ $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ تحدّد كل منهما قيمة صغرى للدالّة. لتحديد النقاط التي تُشكّل حل المسألة، جد المسافة بين النقطة $(0, 2)$ وكل من النقاط $(0, f(0))$ وَ $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ وَ $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$. ستجد أن النقطتين $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ وَ $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ هما الحل، وأن المسافة بين كل منهما والنقطة $(0, 2)$ تساوي 1.45 تقريبًا

نقطة مراقبة **2. جِد نقاط القطع المكافئ $f(x) = x^2 - 2$ الأقرب إلى النقطة $(0, -1)$.**

مثـــال 3 إيجاد الطول الأقصر

طُلب إلى أحد المهندسين أن يشدّ كلاًّ من عمودين بينهما 15 m بسلك معدني إلى نقطة تقع بينهما كما هو مُبيّن في الرسم المقابل. إلى أي نقطة بين العمودين عليه أن يربط طرفي السلكين لكي يكون مجموع تربيعي طوليهما أقل ما يُمكن علمًا بأن ارتفاعي العمودين هما 14 m وَ 6 m؟



الحل

ارمز بالمتغيّر x إلى بعد النقطة عن العمود الأقصر. معك:
$y^2 = x^2 + 36$ و $z^2 = (15-x)^2 + 14^2$.
المقدار المطلوب جعله يأخذ القيمة الأقل هو، $y^2 + z^2$.

$$f(x) = y^2 + z^2 = x^3 + 36 + (15-x)^2 + 14^2 = 2x^2 - 30x + 457$$

لإيجاد قيمة x التي تُعطي $f(x)$ قيمتها الصغرى، علينا حل المعادلة $f'(x)=0$ ، غير أن $f'(x) = 4x - 30$. إذًا، تأخذ $f(x)$ قيمتها الصغرى عند $\frac{15}{2}$ أي عندما تكون النقطة في المنتصف بين العمودين.

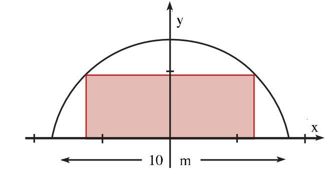


3. مجموع محيطي مثلث متساوي الأضلاع ومربع يُساوي 10 أمتار. جِد طول ضلع كل منهما لكي يكون مجموع مساحتهما أقل ما يُمكن.

مثـــال 4

جِد طول وعرض المُستطيل الأكبر مساحة الذي يُمكنك رسمه داخل نصف دائرة قطرها 10 أمتار.

الحل



يُمكننا اختيار مستوٍ إحداثي بحيث تقع نصف الدائرة فوق المحور x مع كون مركزها في نقطة الأصل. معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 هي $x^2 + y^2 = 25$ فتكون معادلة نصف الدائرة العلوية $y = \sqrt{25 - x^2}$. إذا كانت النقطة (x, y) أحد رؤوس المستطيل على نصف الدائرة، فإن مساحة المستطيل تُساوي $A = xy = x\sqrt{25-x^2}$. مساحة المستطيل دالة بدلالة x تأخذ قيمتها الكبرى عندما يأخذ هذا المتغيّر قيمة تُحوّل مشتقتها إلى 0. مُشتقة هذه الدالة هي :

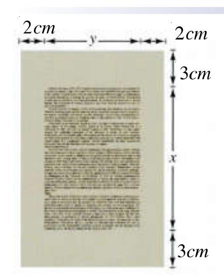
$$A'(x) = \sqrt{25-x^2} + x\left(\sqrt{25-x^2}\right)' = \sqrt{25-x^2} + x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right) = \frac{25-2x^2}{\sqrt{25-x^2}}$$

قيم x التي تُحوّل المُشتقة إلى 0 هي جذرا المعادلة $25 - 2x^2 = 0$ أي $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$. قيمة y هي $y = \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. طول المستطيل هو $L = 2x = 5\sqrt{2}$ وعرضه هو $\ell = y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.



4. جِد طول وعرض المستطيل الأكبر مساحة الذي يُمكنك رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها r.

مثـــال 5 إيجاد المساحة الأقل



يعمل أحد المصمّمين في الطباعة على تصميم صفحة مستطيلة، تكون المساحة المخصّصة فيها للطبع $150\ cm^2$ ويكون عرض كل من الهامشين الأعلى والأدنى 3 cm وعرض كل من الهامشين الأيمن والأيسر 2cm . كم عليه أن يختار طول الصفحة وعرضها لكي يستهلك أقل كمية ممكنة من الورق؟

الحل

ارمز بـ x إلى طول المساحة المخصصة للطبع. وَ بـ y إلى عرضها.

وارمز بـ A لمساحة الورقة.

$A=(x+6)(y+4)$. x وَ y يرتبطان بالعلاقة $xy=150$

مما يسمح بكتابة A كدالّة بدلالة x .

$$A(x)=(x+6)\left(\frac{150}{x}+4\right)=174+4x+\frac{900}{x}$$

فترة المنفعة في هذه المسألة هي مجموعة الأعداد الحقيقية

الموجبة. مشتقّة الدالّة $A(x)$ هي: $A'(x)=4-\frac{900}{x^2}$

وقيمها الحرجة هي جذور المعادلة $A'(x)=4-\frac{900}{x^2}=0$. لهذه المعادلة جذران هما ± 15

تقريبًا. الجذر السالب لا معنى له. يبقى أن طول الصفحة وعرضها هما 21 cm

وَ $\left(\frac{150}{15}+4\right)=14\text{ cm}$.



5. يعمل أحد المصمّمين في الطباعة على تصميم صفحة مستطيلة تكون المساحة المخصصة فيها للطبع 256 cm^2 ويكون عرض كل من الهوامش الأربعة 3 cm . كم عليه أن يختار طول الصفحة وعرضها لكي يستهلك أقل كمية ممكنة من الورق؟

5–4 التمارين

1 جِد عددين مجموعهما S بحيث يكون ناتج ضربهما أكبر ما يُمكن.

2 جد عددين موجبين ناتج ضربهما 192 بحيث يكون مجموع الأول وَ 3 أضعاف الثاني أصغر ما يُمكن.

3 جِد عددين بحيث يكون مجموع الأول وضعفي الثاني 100 ، وناتج ضربهما أكبر ما يُمكن.

4 جِد طول مستطيل وعرضه بحيث تكون مساحته أكبر ما يُمكن علمًا بأن محيطه 100 m.

في التمرينين 5 وَ 6، جِد نقطة بيان الدالّة الأقرب إلى النقطة المعطاة.

5 $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $(4, 0)$

6 $f(x)=(x+1)^2$ ؛ $(-1, 3)$

7 **حركة مرور** تُشكّل الدالّة $F(v)=\frac{v}{22+0.02v^2}$ نموذجًا لدراسة معدّل حركة المرور (عدد السيارات في الثانية) على طريق مزدحم، حيث يرمز v إلى سرعة السير على هذا الطريق. أي سرعة تجعل هذا المعدّل أكبر ما يُمكن؟

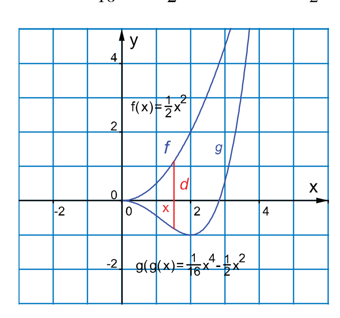
8 يُخطّط مزارع لتسييج مساحة مستطيلة من الأرض على ضفة النهر بغية تأمين حقل من العشب يقتات منه قطيع الغنم. كم عليه أن يختار طول هذا المستطيل وعرضه لكي يكون طول السياج أقصر ما يُمكن، علمًا بأن مساحة الأرض المسيجة يجب أن تكون $180\,000\text{ m}^2$ وأن المزارع لن يُسيّج الأرض من جهة النهر؟



9 **المساحة الأكبر** تتكوّن النافذة النورماندية من نافذة مستطيلة تعلوها نافذة نصف دائرية كما يُبيّن الرسم المقابل. جِد أكبر مساحة ممكنة لنافذة نورماندية محيط مستطيلها 6 m .

10 مثلث متساوي الساقين قطر الدائرة المحيطة به 8 cm. جِد أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث.

11 استعمل الدالتين $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ وَ $g(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ على الفترة $[0, 4]$.



أ اكتب مقدارًا بدلالة x يُمثّل المسافة العمودية d بين بيانَي الدالّتين عند x . واستعمل حساب التفاضل لتحديد قيمة x التي تجعل هذه المسافة أكبر ما يُمكن.

ب جِد معادلتَي المماسَّين للبيانَين عندما يساوي x القيمة التي وجدتها في السؤال ب. ارسم المماسَّين. أي علاقة تربط بينهما؟

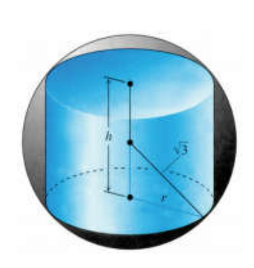
12 يتخذ خزانٌ صغير شكل أسطوانة تنتهي بنصف كرة عند كل قاعدة من قاعدتيها. الحجم الكلّي لهذا الخزّان هو $12\ m^3$. جِد نصف قطر الأسطوانة الذي يؤمِّن أقل مساحة سطحية للخزان.

13 يتخذ خزان صناعي شكلاً مشابهًا لشكل الخزان في التمرين السابق، وحجمه $3\ m^3$. تبلغ كلفة نصفي الكرة بالمتر المربع ضعف كلفة الأسطوانة. جِد قياسات الخزان التي تتطلب أقل كلفة.

حول المفاهيم

14 مستطيل محيطه 20 m. جِد طوله وعرضه لكي تكون مساحته أكبر ما يمكن. هل هناك قيم لطول المستطيل وعرضه تجعل مساحته أقل ما يمكن؟ أوضح جوابك.

15 أسطوانة موجودة داخل كرة نصف قطرها $\sqrt{3}$ كما يُبيّن ذلك الرسم المقابل. جِد ارتفاع الأسطوانة ونصف قطرها لكي يكون حجمها أكبر ما يُمكن.



الفصل 4

مراجعة الفصل

1 عرِّف القيمة الحرجة لدالّة، وارسم بيان دالّة يُظهر مختلف أنواع القيم الحرجة.

2 الدالّة **الفردية** هي دالّة f تحقق $f(-x)=-f(x)$ أيًّا تكن قيمة x . افترض أن f دالّة فردية مستمرة وتقبل الاشتقاق، وأن الجدول يُعطي بعضًا من قيمها.

x	-5	-4	-1	0	2	3	6
y	55	80	35	0	-64	-81	0

أ جد $f(4)$.

ب جد $f(-3)$.

ج مثِّل بيانيًّا معطيات الجدول وارسم بيان الدالّة f على الفترة $[-6, 6]$. ما أقل عدد للقيم الحرجة العائدة إلى الدالّة في هذه الفترة؟ أوضح ذلك.

د هل توجد قيمة واحدة c على الأقل من قيم x في الفترة $]-6, 6[$ تحقّق $f'(c)=-1$ ؟ أوضح ذلك.

هـ هل يُمكن للنهاية $\lim_{x\to 0} f(x)$ ألاّ تكون موجودة؟ أوضح ذلك.

في التمرينين 3 و 4 ، حدّد القيم الحرجة (إن كانت موجودة) وفترات تزايد الدالّة وفترات تناقصها.

3 $f(x)=(x-1)^2(x-3)$

4 $f(x)=\sin x+\cos x$ على الفترة $[0,2\pi]$

في التمرينين 5 و 6، حدّد نقاط الانقلاب، وناقش تقعّر وتحدّب بيان الدالّة.

5 $f(x)=x+\cos x$ على الفترة $[0,2\pi]$

6 $f(x)=(x+2)^2(x-4)$

استعمل، في التمرينين 7 و 8 اختبار المشتقّة الثانية لتجد جميع القيم القصوى.

7 $f(x)=2x^2(1-x^2)$

8 $f(x)=x-4\sqrt{x+1}$

في التمارين من 9 إلى 16، جِد النهاية المطلوبة إن وجدت.

9 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2+5}$

10 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x^2+5}$

11 $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x+5}$

12 $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{-2x}$

13 $\lim_{x\to+\infty} \frac{5\cos x}{x}$

14 $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$

15 $\lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{x+\cos x}$

16 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2\sin x}$

في التمارين من 17 إلى 20، جِد جميع المحاذيات الأفقية والعمودية لبيان الدالّة.

17 $f(x)=\frac{2x+3}{x-4}$

18 $f(x)=\frac{5x^2}{x^2+2}$

19 $f(x)=\frac{3}{x}-2$

20 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

في التمارين من 21 إلى 72، ارسم بيان الدالّة.

21 $f(x)=4x^3-x^4$

22 $f(x)=x\sqrt{16-x^2}$

22 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

23 $f(x)=(x-3)^2(x-1)^3$

24 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

25 $f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}$

26 $f(x)=x^2+x+\frac{4}{x}$

27 $f(x)=|x-1|+|x-3|$

28 **مسافات** كانت الباخرة A على بعد 100 km عن الباخرة B لجهة الشرق. كانت الباخرة A تبحر باتجاه الغرب بسرعة معدّلها 12 km/h والباخرة B تبحر جنوبًا بسرعة 10 km/h . في أي وقت ستكون الباخرتان على أقرب مسافة ممكنة؟ وما هي المسافة؟

29 يقع ضلعا الزاوية القائمة في مثلث قائم على محورَي الإحداثيات ويمر وتره في النقطة $(1, 8)$. جد رؤوس هذا المثلث بحيث تكون مساحته أقل ما يُمكن.

الفصل 4

تحضيـــر للاختبـــار

1 أي من الدوال التالية لها قيمتان قصويان فقط؟

أ $f(x)=|x-2|$ ب $f(x)=x^3-6x+5$ ج $f(x)=x^3+6x-5$

د $f(x)=\tan x$ هـ $f(x)=x+\ln x$

2 على أي فترة تكون الدالّة $f(x)=e^{x^3-6x^2+8}$ متناقصة؟

أ $]-\infty, -2[$ ب $]0, 4[$ ج $]2, 4[$ د $]4, +\infty[$ هـ غير مو جودة

3 إذا كان $a<0$ ، يكون بيان الدالّة $f(x)=ax^3+3x^2+4x+5$ مقعّرًا على الفترة:

أ $]-\infty, -\frac{1}{a}[$ ب $]-\infty, \frac{1}{a}[$ ج $]-\frac{1}{a}, +\infty[$ د $]\frac{1}{a}, +\infty[$ هـ $]-\infty, -1[$

4 الإحداثيات x لنقاط انقلاب الدالّة $f(x)=x^5-5x^4+3x+7$ ، هي:

أ 0 فقط ب 1 فقط ج 3 فقط د 0 وَ 3 هـ 0 وَ 1

5 أي مما يلي يسمح لك بالقول إن لبيان الدالّة f نقطة انقلاب عند $x=c$ ؟

أ للمشتقّة f' قيمة كبرى محليّة عند $x=c$ ب $f''(c)=0$ ج $f''(c)$ غير موجودة

د تتغيّر إشارة $f''(x)$ عند $x=c$ هـ f دالّة حدودية من الدرجة الثالثة وَ $c=0$.

6 مجموع عددين موجبين 60، ما أكبر قيمة ممكنة لناتج ضرب أحدهما في تربيع الآخر؟

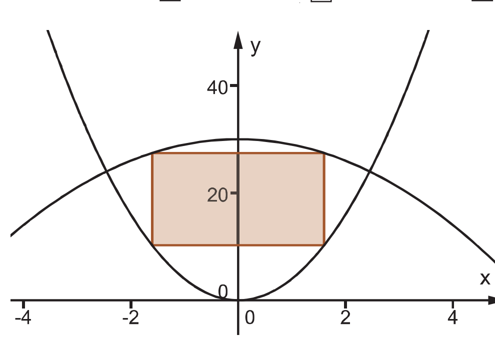
أ 3481 ب 3600 ج 27 000 د 32 000 هـ 36 000

7 مثلث قائم طول وتره 10، ما أكبر قيمة ممكنة لمساحته؟

أ 24 ب 25 ج $25\sqrt{2}$ د 48 هـ 50

8 المستطيل الأحمر مُحاط بالقطع المكافئ $y=4x^2$ والقطع المكافئ $y=30-x^2$.
ما أكبر مساحة ممكنة لهذا المستطيل؟

أ $20\sqrt{2}$ ب 40 ج $30\sqrt{2}$ د 50 هـ $40\sqrt{2}$



9 يتزايد حجم مكعّب بمعدّل $24cm^3/min$ بينما يتزايد طول ضلعه بمعدّل $2cm/min$.
ما طول ضلع المكعب؟

أ $2cm$ ب $2\sqrt{2}\,cm$ ج $\sqrt[3]{12}cm$ د $4cm$ هـ $8cm$

10 يتزايد حجم مكعّب بمعدّل $24cm^3/min$ بينما تتزايد مساحته السطحية بمعدّل $12cm^2/min$.
ما طول ضلع المكعّب؟

أ $2cm$ ب $2\sqrt{2}\,cm$ ج $\sqrt[3]{12}cm$ د $4cm$ هـ $8cm$

11 تتحرّك نقطة على دائرة الوحدة. كانت سرعتها الأفقية $\frac{dx}{dt}=3$ عند النقطة $(0.6, 0.8)$.
ما سرعتها العمودية $\frac{dy}{dt}$ عند هذه النقطة؟

أ -3.875 ب -3.75 ج -2.25 د 3.75 هـ 3.875

GRADE12-CHAPTER 5 2013-final 2/12/15 2:33 PM Page 3

الفصل

5

التكامل Integration

الفصل الخامس

الدروس

تطوّر فن صنع الفخّاريات في كثير من البلدان ولا يزال قائمًا حتى اليوم. يُشكِّل بيان الدالّة $y = 5.0 + 2\sin\frac{x}{4}$ حيث $0 \le x \le 8\pi$ ، الهيئة الجانبية لوعاء من الفخار، حيث يرمز x إلى الارتفاع (بالإنش) ويرمز y إلى نصف القطر عند الارتفاع x. صُنعت قاعدة الوعاء ووضعت على الطاولة الدوّارة. ما كمّية الصلصال التي يجب إضافتها إلى القاعدة لإنشاء هذا الوعاء علمًا، بأن نصف القطر الداخلي يقلّ دائمًا إنشًا واحدًا عن نصف القطر الخارجي؟

هل أنت مستعد؟

المُفْردات

اربط كل عبارة في العمود الأيمن بتفسيرها في العمود الأيسر.

1
1. مشتقّة الدالّة f عند $x=a$ أ نهاية $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما يسعى Δx إلى 0.
2. معدّل التغيّر الوسطي   ب ما يسعى إليه مقدار في متغيّر x عندما يسعى x إلى قيمة معيّنة أو إلى $\pm\infty$
3. معدّل التغيّر اللحظي   ج ما يسعى إليه المقدار $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ عندما يسعى h إلى 0.
4. دالّة مستمرة   د ناتج قسمة التغيّر في y على التغيّر في x.
5. نهاية   هـ أكبر قيمة تتّخذها دالّة على فترة.

و دالة يُمكن رسم بيانها بالقلم دون الاضطرار إلى رفعه.

مجاميع مشهورة

2 جد المجموع $s_n=1+2+...+n$ بدلالة n حيث n عدد صحيح موجب.

3 أثبت، باستعمال الاستقراء، أن $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ حيث n عدد صحيح موجب.

الاشتقاق

4 جد دالّتين مختلفتين $u(x)$ و $v(x)$ تحقّقان $u'(x)=v'(x)=a$، حيث a عدد حقيقي.

5 بيّن أن للدالّتين $f(x)=e^{2x}$ و $g(x)=e^{2x}+C$، حيث C عدد حقيقي، المشتقّة نفسها.

6 إذا كانت $f(x)$ مشتقّة الدالّة $u(x)$، فما مشتقّة الدالّة $v(x)=u(x)+C$ حيث C عدد حقيقي؟

قواعد الاشتقاق

في التمارين من 7 إلى 12، جِد مشتقّة الدالّة.

7 $f(x)=e^x+\sin x$

8 $f(x)=1+\tan x$

9 $f(x)=2\ln x-\frac{1}{x}$

10 $f(x)=e^x\ln(x+1)$

11 $f(x)=e^{\sin x}$

12 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$

النهايات

اكتب على أبسط صورة.

13 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

14 $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2+7}$

15 $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}$

1–5 التكامل غير المحدَّد
Indefinite Integral

الأهداف

- يستعمل كتابة التكامل غير المحدَّد للتعبير عن الدالّة الأصلية.
- يجد الدوال الأصلية باستعمال قواعد التكامل.
- يجد الدالّة الأصلية لدالّة معيّنة والتي تمر في نقطة معيّنة.

المفردات Vocabulary

الدالّة الأصلية Antiderivative

التكامل غير المحدَّد Inefinite Integral

ثابت التكامل Constant of integration

استكشاف

إيجاد دوال أصلية: جِد الدالّة $F(x)$ التي ولَّدت المشتقّة.

.1 $F'(x)=2x$ .2 $F'(x)=x$ .3 $F'(x)=x^2$

.4 $F'(x)=\frac{1}{x^2}$ .5 $F'(x)=\cos x$

كيف وجدت هذه الدوال؟

الدالّة الأصلية

تعلّمت في الدروس السابقة كيف تنتقل من دالّة معلومة إلى مشتقّتها. لكن، هل تساءلت يومًا إن كان بوسعك إيجاد دالّة عرفتَ مشتقتها؟

سوف تتعلم في هذا الدرس ما يلي: إذا كانت f دالّة مستمرة يمكن إيجاد دالّة F قابلة للاشتقاق بحيث تكون f مشتقّتها. تُسمّى هذه الدالّة F **دالة أصليّة** للدالّة f. سوف تتعلّم أيضًا بعض القواعد التي تساعدك على إيجاد جميع الدوال الأصلية لدالّة معيّنة.

الدالّة الأصلية

نقول عن دالة تقبل الاشتقاق F أنها **دالة أصليّة** للدالة f إذا كانت مشتقة F تساوي f.

هل يوجد أكثر من دالّة أصلية لدالّة معيّنة؟ الجواب عن هذا السؤال بسيط جدًّا. فجميع الدوال الثابتة هي دوال أصلية للدالة $f(x)=0$.

مبرهنة 1–5 الدالّة الأصلية

إذا كانت $F(x)$ دالّة أصلية للدالّة $f(x)$، فإن الدالة $G(x)=F(x)+C$، حيث C عدد حقيقي، دالة أصلية للدالّة $f(x)$.

يكفي إيجاد مشتقّة الدالة $G(x)=F(x)+C$ لإثبات هذه المبرهنة.

يستعمل العاملون في حقل الرياضيات الرمز $\int f(x)dx$ للدلالة على أي دالة أصلية للدالّة $f(x)$. وهم يُسمّون هذا الرمز **التكامل غير المحدَّد** للدالّة $f(x)$.

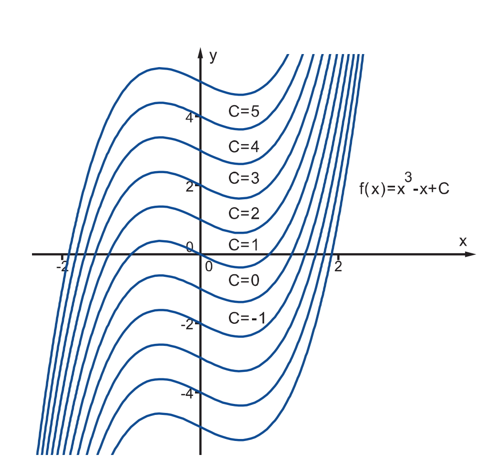
مثـــال 1 إيجاد دالّة أصلية

جِد $\int x^2 dx$

الحل

إذا تذكّرت قاعدة اشتقاق دوال القوة $f(x)=ax^n$، ستجد أن الدالّة $f(x)=x^2$ هي مشتقّة دالّة من النوع $F(x)=ax^3$. لكن مشتقّة هذه الأخيرة هي $F(x)=3ax^2$. إذا كانت $F'(x)=f(x)$ فإن $a=\frac{1}{3}$ وَ $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ دالّة أصلية للدالّة $f(x)=x^2$. يُمكنك أن تكتب إذن: $\int x^2 dx=\frac{1}{3}x^3+C$. لاحظ وجود العدد C. يهدف وجود هذا العدد الثابت للتذكير بأن دالّتين أصليتين للدالّة نفسها تختلفُ إحداهما عن الأخرى بزيادة عدد حقيقي.

نقطة مراقبة 1. جِد $\int x^3 dx$



تدل العلاقة $G(x)=F(x)+C$ بين دالّتين أصليتين للدالة نفسها، على أن بيانات جميع الدوال الأصلية لدالّة معيّنة تنتج من سحب عمودي لبيان واحدة منها، كما يُعبّر عن ذلك الشكل المقابل. تبعًا لهذه الملاحظة، فإن بين جميع الدوال الأصلية لدالة معيّنة، دالة أصلية وحيدة يمر بيانها في نقطة معيّنة من المستوي الإحداثي. يُمثل الثابت C نقطة التقاطع العمودي للدالّة الأصلية.

مثـــال 2 إيجاد دالّة أصلية محدَّدة

جِد الدالة الأصلية للدالة $f(x)=x^2$ التي يمر بيانها في النقطة(3,3).

الحل

$G(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ دالّة أصلية للدالّة $f(x)=x^2$. لكي يمر بيان هذه الدالّة الأصلية في النقطة $(3,3)$، يجب أن يحقّق C المعادلة $3=\frac{1}{3}3^3+C$ أي أن يساوي -6. ينتج من ذلك أن الدالّة الأصلية للدالّة $f(x)=x^2$ التي يمر بيانها في النقطة $(3,3)$ هي $G(x)=\frac{1}{3}x^3-6$.



2. جِد الدالة الأصليّة للدالّة $f(x)=x^4$ التي يمر بيانها في النقطة $(2,4)$.

سوف تتعلم في هذا الدرس كيف تجد التكامل غير المحدَّد لدالّة معيّنة. بما أن الاشتقاق هو الانتقال من دالّة إلى مشتقّتها، فإن إيجاد التكامل غير المحدَّد لدالّة معيّنة هو العملية العكسية للاشتقاق **Antiderivative**. ينتج من هذه الملاحظة أن قواعد الاشتقاق تُنتج قواعد للتكامل غير المحدَّد.

قواعد التكامل

قواعد الاشتقاق	قواعد التكامل
$(C)'=0$	$\int 0dx=C$
$(kx)'=k$	$\int kdx=kx+C$
$(kf(x))'=kf'(x)$	$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx+C$
$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$	$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx+C$
$(f(x)\pm g(x)\pm h(x)\pm...)'$ $=f'(x)\pm g'(x)\pm h'(x)\pm...$	$\int(f(x)\pm g(x)\pm h(x)\pm...)dx$ $=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\pm\int h(x)dx\pm...$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad n\neq -1$
$(e^x)'=e^x$	$\int e^x dx=e^x+C$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$
$(\sin x)'=\cos x$	$\int\cos xdx=\sin x+C$
$(\cos x)'=-\sin x$	$\int\sin dx=-\cos x+C$

مثـــال 3 تطبيق قواعد التكامل

جِد $\int(2\cos x-5x)dx$

الحل

$$\int(2\cos x-5x)dx=\int 2\cos xdx-\int 5xdx=2\int\cos xdx-5\int xdx=2\sin x-\frac{5}{2}x^2+C$$



3. جِد $\int(2\sin x+3x^2)dx$

لتسهيل تطبيق قواعد التكامل، عليك، في بعض الحالات، إعادة كتابة الدالّة التي تبحث عن دالّة أصلية لها بحيث يكون تطبيق القواعد سهلاً.

مثـــال 4 خطوات إيجاد التكامل غير المحدّد

أكمل الجدول.

التكامل	أعد كتابته	كامِلْ	بسِّط
أ $\int\frac{1}{x^3}dx$			
ب $\int\sqrt{x}\,dx$			
ج $\int 2\sin xdx$			

الحـل

التكامل	أعد كتابته	كامِلْ	بسّط
أ $\int \frac{1}{x^3}dx$	$\int x^{-3}dx$	$\frac{-1}{2}x^{-2}+C$	$-\frac{1}{2x^2}+C$
ب $\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{\frac{1}{2}}dx$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
ج $\int 2\sin x dx$	$2\int \sin x dx$	$2(-\cos x)+C$	$-2\cos x+C$



4. جد $\int x\sqrt{x}dx$

1–5 التمـاريـن

في التمارين من 1 إلى 3، تحقَّق من صحّة ما هو مكتوب، باشتقاق الدالّة الأصلية.

1 $\int\left(-\frac{9}{x^4}\right)dx=\frac{3}{x^3}+C$

2 $\int\left(4x^3-\frac{1}{x^2}\right)dx=x^4+\frac{1}{x}+C$

3 $\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{x}}dx=\frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}}+C$

أكمل الجدول.

	التكامل	أعد كتابته	كامِلْ	بسّط
4	$\int\sqrt[3]{x}dx$			
5	$\int\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$			
6	$\int\frac{1}{(3x)^2}dx$			

في التمارين من 7 إلى 15، جِد التكامل غير المحدَّد، وتحقَّق من صحّة جوابك باستعمال الاشتقاق.

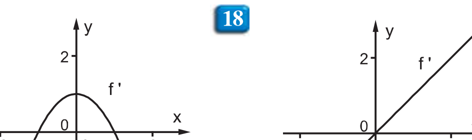
7 $\int(2x-3x^2)dx$ **8** $\int(x^3-4x+2)dx$ **9** $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

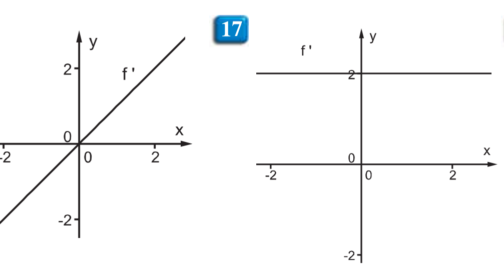
10 $\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx$ **11** $\int(2x^2-1)^2dx$ **12** $\int\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)dx$

13 $\int(2\sin x+3\cos x)dx$ **14** $\int(x^2-\sin x)dx$ **15** $\int(\tan^2 x+1)dx$

في التمارين من 16 إلى 18، ارسم بيانين تقريبيّين لدالّتين لهما مشتقة مشتركة يُمثّل الرسم بيانها.

16 **17** **18**





في التمرينين 19 و 20، جِد الدالّة $f(x)$ بمعرفة مشتقّتها ونقطة على بيانها.

19 $f'(x)=2x-1$ ؛ $(1,1)$

20 $f'(x)=2(x-1)$ $(3,2)$

21 **نمو النباتات** يبيع مشتل نوعًا من الأشجار القزمة بعد 6 سنوات من غرسها. تُعتبر الدالة $h'(t)=1.5t+5$ نموذجًا لمعدّل نمو هذا النوع مقيسًا بالسنتيمتر في السنة، خلال السنوات الست. كان طول شجيرة من هذا النوع 12cm عندما غرست $(t=0)$.

أ) جِد طول هذه الشجيرة $h(t)$ بعد t سنة.

ب) كم سيكون طولها عند بيعها؟

حول المفاهيم

22 يُظهر الرسم المقابل بيان المشتقة f' لدالة f. استعمله للإجابة عن الأسئلة علمًا بأن $f(0)=-4$.

أ) أعطِ قيمة تقريبية لميل الدالّة f عند $x=4$. وضّح جوابك.

ب) هل يمكن أن يكون $f(2)=-1$؟ وضّح جوابك.

ج) هل يمكن أن يكون $f(5)-f(4)>0$؟ وضّح جوابك.

د) أعطِ قيمة تقريبية لـ x حيث تتّخذ الدالة f قيمة كبرى محلّيّة. وضّح جوابك.

هـ) قدّر فترة يكون خلالها بيان الدالة f مقعّرًا وفترة أخرى يكون فيها هذا البيان محدّبًا. أعطِ قيمًا تقريبية للإحداثي x العائد إلى نقطة الانقلاب.

و) أعطِ قيمة تقريبية لـ x حيث تتّخذ المشتقة الثانية f'' قيمة صغرى.

ز) ارسم بيانًا تقريبيًّا للدالّة f.

23 بأي سرعة أصلية يجب قذف كرة إلى أعلى انطلاقًا من مستوى الأرض، قرب برج إيفل في باريس، لكي تبلغ قمته التي تعلو 300m؟

24 **تسارع** انطلقت سيارة كانت متوقفة عند إشارة المرور، عندما تحوّلت إلى الأخضر، بتسارع قدره 2m/s^2. في اللحظة نفسها تجاوزت تلك السيارة شاحنةٌ تسير بسرعة ثابتة مقدارها 10m/s.

أ) بعد كم مترًا تلحق السيارة بالشاحنة؟

ب) كم ستكون سرعة السيارة عندما تدرك الشاحنة؟

صواب أم خطأ؟ في التمارين من 25 إلى 29، اذكر إن كانت المقولة صوابًا فعلّله، أو خطأ فأثبته بمثال مضاد.

25 كل دالّة أصلية لدالّة حدودية من الدرجة n هي دالّة حدودية من الدرجة $n+1$.

26 إذا كانت f دالّة حدودية، فإن لها دالّة أصلية وحيدة يمر بيانها في نقطة الأصل.

27 إذا كانت $F(x)$ وَ $G(x)$ دالّتين أصليتين للدالّة f ، فإن $F(x)=G(x)+C$ حيث C عدد حقيقي.

28 $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$

29 لكل دالة f ، دالة أصلية واحدة.

30 جِد دالة f تكون مشتقتها الثانية $f''(x) = 2x$ ويكون لبيانها مماسّ أفقي عند النقطة $(2,0)$.

31 $f'(x)=\begin{cases} 1 & 0 \le x < 2 \\ 3x & 2 < x \le 5 \end{cases}$ جِد الدالّة f علما بأنها مستمرة وأن $f(2)=6$.

هل تقبل هذه الدالّة الاشتقاق عند $x = 2$؟

5-2 التكامل المحدَّد

Definite Integral

الأهداف

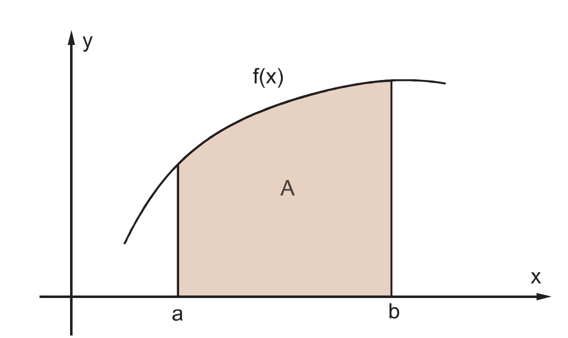
- يحسب التكامل المحدَّد باستعمال خصائصه.

المفردات Vocabulary

التكامل المحدَّد	Definite Integral
حدود التكامل	Limits of integration

التكامل المحدَّد

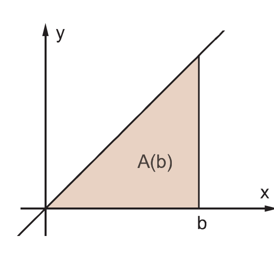
تعلمت في الدرس السابق أن إيجاد الدالّة الأصلية لدالة معيّنة هو العملية العكسية للاشتقاق، وأن التكامل غير المحدَّد لدالّة f يدلّ على دالّة أصلية لهذه الدالّة. غير أن للتكامل غير المحدّد دورًا آخر لا يقل أهميّة عن الدور المذكور. سوف تتعلّم في هذا الدرس كيف تستعمل الدالّة الأصلية لحل المسألة الأساسية الثانية في حساب التفاضل والتكامل، وهي مسألة المساحة. سوف تتعلم كيف تستعمل الدالّة الأصلية لكي تجد مساحة المنطقة التي يحدّها بيان الدالّة والمحور x من ناحية والمستقيمان $x=a$ وَ $x=b$ من ناحية أخرى. سوف نرمز إلى مساحة هذه المنطقة بالرمز A .



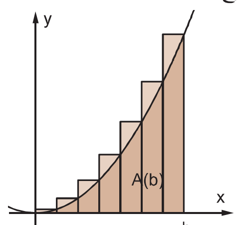
سنهتم أولاً بالمساحة $A(b)$ للمنطقة التي يحدّها بيان الدالّة والمحور x من ناحية والمستقيمان $x=0$ وَ $x=b$ من ناحية أخرى. سنحاول استكشاف نمط لإيجاد مثل هذه المساحة.

إذا كانت $f(x)=k$ ، حيث k عدد حقيقي، فإن $A(b)=bk$.

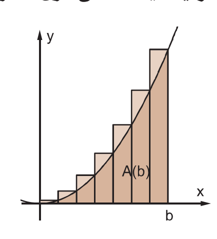
إذا كانت $f(x)=x$ ، فإن $A(b)=\frac{1}{2}b^2$

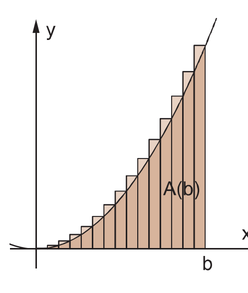


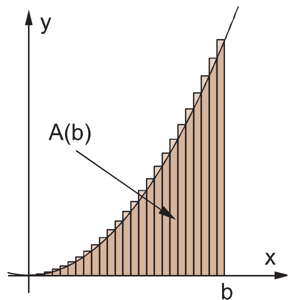
إذا كانت $f(x)=x^2$ فإن الأمر يُصبح أكثر تعقيدًا. إذ ليس للمنطقة التي يحدّها بيان الدالّة f والمحور x والمستقيمان $x=0$ وَ $x=b$ شكل هندسي معروف. سنحاول إيجاد قيمة تقريبية لهذه المساحة. من أجل ذلك، نقسم الفترة $[0,b]$ إلى n فترة متساوية، مدى كل منها $\frac{b}{n}$ ونقيم على هذه الفترات مستطيلات ارتفاعاتها على التوالي $f\left(\frac{b}{n}\right)$، $f\left(\frac{2b}{n}\right)$، ...، $f\left(\frac{nb}{n}\right)$. يشكّل مجموع مساحات هذه المستطيلات قيمة تقريبية للمساحة $A(b)$.



إذا نظرت إلى الرسوم البيانية الثلاثة أدناه، تلاحظ أن ازدياد قيمة n يزيد عدد المستطيلات ويقرّب مجموع مساحاتها من $A(b)$. تستند إلى هذه الملاحظة لتقول بأن $A(b)$ هي نهاية هذا المجموع، عندما تتزايد قيمة n من دون حدود.







مجموع مساحات هذه المستطيلات هو

$$S_n = \frac{b}{n} f\left(\frac{b}{n}\right) + \frac{b}{n} f\left(\frac{2b}{n}\right) + \ldots + \frac{b}{n} f\left(\frac{nb}{n}\right) = \frac{b}{n}\left[\frac{b}{n}\right]^2 + \frac{b}{n}\left[2\frac{b}{n}\right]^2 + \ldots + \frac{b}{n}\left[n\frac{b}{n}\right]^2$$

$$= \frac{b^3}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

لكن $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ينتج من ذلك:

$$A(b) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{b^3}{n^3} = \frac{1}{3} b^3 \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^3} = \frac{1}{3} b^3 \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{2n^3} = \frac{1}{3} b^3$$

يلخص الجدول التالي ما توصلنا إليه.

A	$f(x)$
$A = kb$	$f(x) = k$
$A = \frac{1}{2} b^2$	$f(x) = x$
$A = \frac{1}{3} b^3$	$f(x) = x^2$

يوحي الجدول أعلاه وكأن المساحة A تُحسب باستعمال دالّة $F(x)$ حيث $A = F(b)$. من ناحية أخرى، يوحي الجدول التالي بفكرة عن كيفية إيجاد مثل هذه الدالّة $F(x)$.

العلاقة بين $f(x)$ وَ $F(x)$	$F(x)$	A	$f(x)$
$F'(x) = f(x)$	$F(x) = kx$	$A = kb$	$f(x) = k$
$F'(x) = f(x)$	$F(x) = \frac{1}{2} x^2$	$A = \frac{1}{2} b^2$	$f(x) = x$
$F'(x) = f(x)$	$F(x) = \frac{1}{3} x^3$	$A = \frac{1}{3} b^3$	$f(x) = x^2$

تستنتج من النمط السابق أن المساحة $A(b)$ تساوي $F(b)$ حيث $F(x)$ هي الدالّة الأصلية للدالّة $f(x)$ حيث $C = 0$. إذا انتقلنا إلى الحالة العامة، حيث f دالة مستمرة، وبالاستناد إلى الشكل المقابل، فإن من الممكن تحويط المساحة $A(b+h) - A(b)$ بحدّين هما مساحة المستطيل الصغير ومساحة المستطيل الكبير. لكن مساحة المستطيل الصغير تساوي $hf(b+h)$ ومساحة الكبير $hf(b)$.

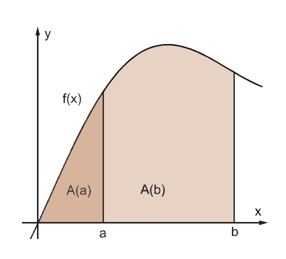
ينتج من ذلك $hf(b+h) \le A(b+h) - A(b) \le hf(b)$

وبالتالي: $f(b+h) \le \frac{A(b+h)-A(b)}{h} \le f(b)$

عندما يسعى h إلى 0 يكون لدينا

$$\lim_{h\to 0} f(b+h) \le \lim_{h\to 0} \frac{A(b+h)-A(b)}{h} \le \lim_{h\to 0} f(b)$$

لكن $\lim_{h\to 0} f(b+h) = f(b)$ لأن f دالّة مستمرة عند $x=b$ وَ $\lim_{h\to 0} \frac{A(b+h)-A(b)}{h} = A'(b)$ بالاستناد إلى تعريف المشتقّة وَ $\lim_{h\to 0} f(b) = f(b)$. نستنتج ما سبق، وبالاستناد إلى مبرهنة الشُرطيين، أن $A'(b) = f(b)$ وأن $A(x)$، بالتالي، دالّة أصلية للدالّة $f(x)$.



إذا عدنا إلى مساحة المنطقة التي يحدّها بيان الدالّة والمحور x من ناحية والمستقيمان $x=a$ وَ $x=b$ من ناحية أخرى، نجد أنها تساوي $A(b)-A(a)$ حيث $A(x)$ دالة أصلية لِـ $f(x)$ أي $\boxed{S = A(b) - A(a)}$

وهكذا نرى أن الدوال الأصلية مفيدة في حساب المساحات.

مثـــال 1 إيجاد مساحة منطقة

أ $f(x) = x^3$. جد مساحة المنطقة التي يحدّها بيان f والمحور x والمستقيمان $x=2$ وَ $x=4$.

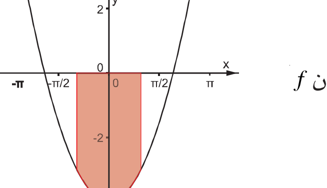
الحـل

مساحة المنطقة هي $A = \int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 x^3 dx = F(4) - F(2)$

حيث $F(x)$ دالّة أصلية للدالّة $f(x)$. بما أن الدالّة $F(x) = \frac{1}{4}x^4$

فإن المساحة هي $A = F(4) - F(2) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}2^4 = 60$.

ب $f(x) = x^2 - 4$. جد مساحة المنطقة التي يحدّها بيان f والمحور x والمستقيمان $x=-1$ وَ $x=1$.



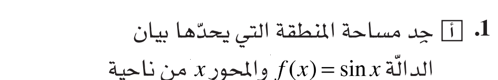
الحـل

مساحة المنطقة A هي القيمة المطلقة للتكامل

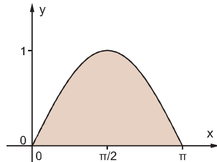
$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 4\right)dx = F(1) - F(-1)$$

حيث $F(x)$ دالّة أصلية للدالّة $f(x)$. بما أن الدالّة $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$ فإن المساحة هي $A = |I| = |F(1) - F(-1)| = \left|\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1) - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 - 4(-1)\right]\right| = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$





1. أ جد مساحة المنطقة التي يحدّها بيان الدالّة $f(x) = \sin x$ والمحور x من ناحية والمستقيمان $x=0$ وَ $x=\pi$.



ب جد مساحة المنطقة التي يحدّها بيان الدالّة $f(x) = \cos x$ والمحور x والمستقيمان $x = \frac{\pi}{2}$ وَ $x = -\frac{\pi}{2}$.

تعريف التكامل المحدَّد

إذا كانت f دالّة مستمرة وكان a وَ b قيمتين في مجالها، فإن **التكامل المحدَّد** للدالّة f بين a وَ b هو

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

حيث $F(x)$ دالّة أصلية لـ $f(x)$. تُسمّى a **الحد الأدنى** للتكامل وَ b **الحد الأعلى**، وَ f الدالّة **موضوع التكامل**.

يستعمل العاملون في حقل الرياضيات الكتابة الرمزية $\left[F(x)\right]_a^b$ للدلالة على $F(b) - F(a)$.

يتمتّع التكامل المحدّد بخصائص تسهِّل حسابه.

خصائص التكامل المحدّد

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- إذا كانت f دالّة مستمرة وكان $f(x) \geq 0$ أيًّا يكن x في $[a,b]$، فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- إذا كانت f و g دالّتين مستمرتين وكانت $f(x) \leq g(x)$ أيًّا يكن x في $[a,b]$، فإن
  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- إذا كانت f دالّة مستمرة فإن $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ دالّة قابلة للاشتقاق في جوار a، ومشتقّتها $F'(x) = f(x)$. تُسمّى الدالّة $F(x) = \int_a^x f(x)dx$.

مثـــال 2 حساب تكامل محدَّد

احسب قيمة كل تكامل: أ $\int_2^4 (x^2 - 3x - 2)dx$

ب $\int_{-1}^3 \left(-|x-1| + 2\right)dx$

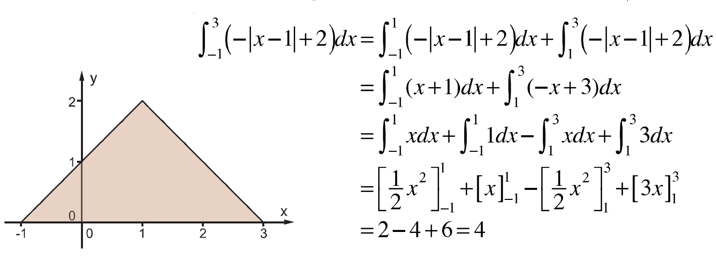
الحـل

أ بالاستناد إلى خصائص التكامل المحدَّد،

$$\int_2^4 (x^2 - 3x - 2)dx = \int_2^4 x^2dx - \int_2^4 3xdx - \int_2^4 2dx = \int_2^4 x^2dx - 3\int_2^4 xdx - 2\int_2^4 dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_2^4 - 3\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_2^4 - 2\left[x\right]_2^4 = \tfrac{1}{3}\left(4^3 - 2^3\right) - \tfrac{3}{2}\left(4^2 - 2^2\right) - 2(4-2) = -\tfrac{10}{3}$$

ب بما أن الدالة تتضمّن المطلق، يجب التخلّص من رمز المطلق ليصبح في الإمكان إيجاد الدوال الأصلية. يتم ذلك عن طريق كتابة التكامل كمجموع تكاملين على الصورة التالية:

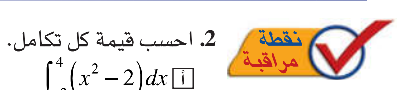


$$\int_{-1}^{3}(-|x-1|+2)dx=\int_{-1}^{1}(-|x-1|+2)dx+\int_{1}^{3}(-|x-1|+2)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_{1}^{3}(-x+3)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}xdx+\int_{-1}^{1}1dx-\int_{1}^{3}xdx+\int_{1}^{3}3dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1}+[x]_{-1}^{1}-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3}+[3x]_{1}^{3}$$
$$=2-4+6=4$$

يُمكنك التحقق من الجواب عن طريق حساب مساحة المثلث في الشكل أعلاه.

نقطة مراقبة

2. احسب قيمة كل تكامل.



أ $\int_{-2}^{4}(x^2-2)dx$ ب $\int_{-1}^{3}(1-|x|)dx$

القيـمة الوسطى Mean Value

يسمّى العدد الحقيقي

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)dx$$

القيمة الوسطى للدالّة f على الفترة $[a,b]$.

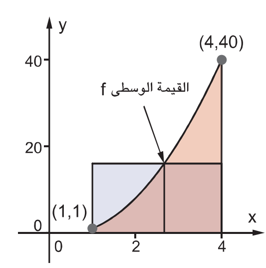
تعلّمت في الإحصاء أن متوسّط مجموعة من القيم قد لا يكون قيمة منها. فأن يكون متوسط درجات طلاّب الصف في مادة الرياضيات 65.7 لا يعني أن هناك طالبًا كانت درجته 65.7. هل القيمة الوسطى للدالّة f على الفترة هو قيمة تتّخذها الدالة عند نقطة تقع في هذه الفترة؟ الجواب عن هذا السؤال هو نعم بالاستناد إلى مبرهنة القيمة الوسطى في التكامل.

مبرهنة 5-2 القيمة الوسطى

إذا كانت f دالّة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$، فإن هناك قيمة $c\in[a,b]$ تحقّق

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)dx$$

مثـــال 3 إيجاد القيمة الوسطى لدالّة



جد القيمة الوسطى للدالّة $f(x)=3x^2-2x$ على الفترة $[1,4]$.

الحل

القيمة الوسطى للدالّة على الفترة $[1,4]$ هو

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)dx=\frac{1}{4-1}\int_{1}^{4}(3x^2-2x)dx=\frac{1}{3}\left[x^3-x^2\right]_{1}^{4}$$
$$=\frac{1}{3}[64-16-(1-1)]=16$$

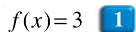
نقطة مراقبة

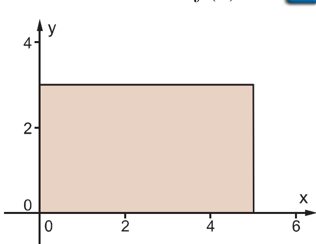


3. جد القيمة الوسطى للدالّة $f(x)=2x+1$ على الفترة $[1,4]$.

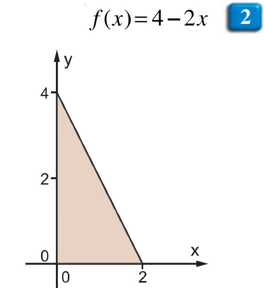
2–5 التمـاريــن

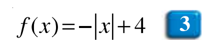
في التمارين من 1 إلى 6، اكتب تكاملاً محددًا يساوي مساحة المنطقة المظلّلة من دون أن تحسب قيمته.

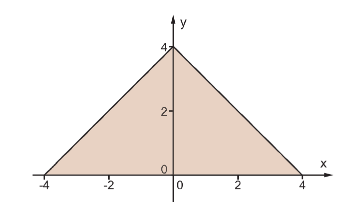
1 
$f(x)=3$



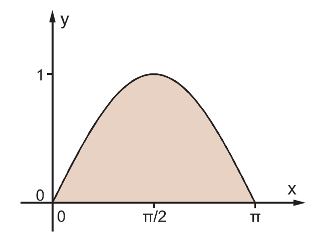
2 $f(x)=4-2x$

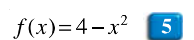


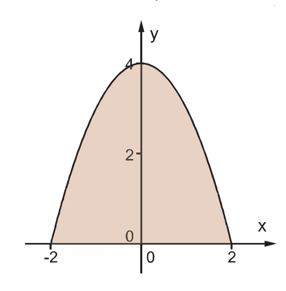
3 
$f(x)=-|x|+4$

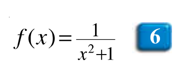


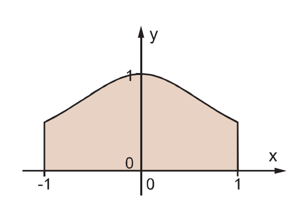
4 $f(x)=\sin x$



5 
$f(x)=4-x^2$



6 
$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$



في التمارين من 7 إلى 10، ارسم المنطقة التي تساوي مساحتها التكامل المحدَّد ثم استعمل ما تعرفه عن قوانين حساب المساحة في الهندسة لإيجاد قيمة التكامل.

7 $\int_0^4 \frac{x}{2}\,dx$ **8** $\int_0^2 (2x+5)\,dx$ **9** $\int_{-1}^1 (1-|x|)\,dx$ **10** $\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$

في التمارين من 11 إلى 14، جِد قيمة كل تكامل، مستعملاً القيم التالية:

$$\int_2^4 x^3 dx = 60 \qquad \int_2^4 x dx = 6 \qquad \int_2^4 dx = 2$$

11 $\int_2^4 4x\,dx$ **12** $\int_2^4 (x^3+4)\,dx$ **13** $\int_2^4 15\,dx$ **14** $\int_2^4 (6+2x-x^3)\,dx$

في التمارين من 15 إلى 26، احسب التكامل.

15 $\int_{2}^{7} 3dx$

16 $\int_{0}^{1} 2x dx$

17 $\int_{-1}^{0} (x^2-2)dx$

18 $\int_{1}^{3} (3x^2+5x-4)dx$

19 $\int_{1}^{2} \left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx$

20 $\int_{-3}^{3} x^{\frac{1}{3}}dx$

21 $\int_{1}^{4} \frac{x-2}{\sqrt{x}}dx$

22 $\int_{-1}^{0} \left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)dx$

23 $\int_{0}^{3} |2x-3|dx$

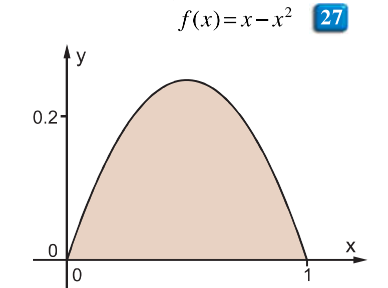
24 $\int_{1}^{4} (3-|x-3|)dx$

25 $\int_{0}^{\pi} (1+\sin x)dx$

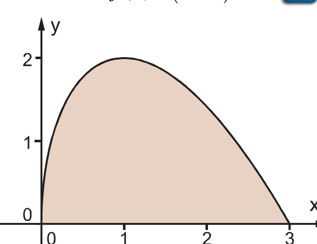
26 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

في التمارين من 27 إلى 30، جِد مساحة المنطقة المظلَّلة.

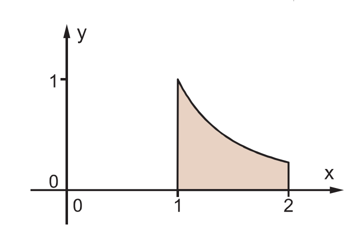
27 $f(x)=x-x^2$



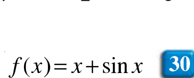
28 $f(x)=(3-x)\sqrt{x}$

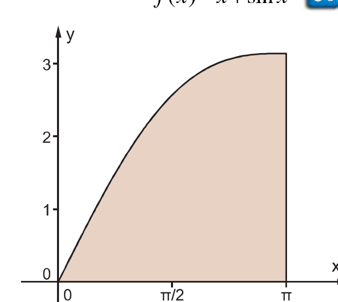


29 $f(x)=\frac{1}{x^2}$



30 $f(x)=x+\sin x$





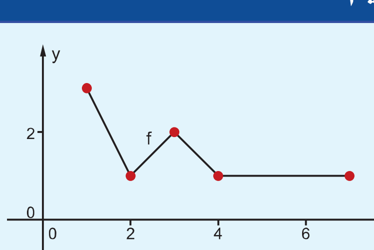
في التمرينين 31 و 32، جِد مساحة المنطقة المحدودة ببيان الدالة $f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x=a$ وَ $x=b$.

31 $f(x)=3x^2+1$ ، $a=0$ ، $b=2$

32 $f(x)=1+\sqrt[3]{x}$ ، $a=0$ ، $b=8$

حول المفاهيم

33 استعمل الرسم المقابل



أ) جد $\int_1^7 f(x)dx$.

ب) جد القيمة الوسطى للدالّة f على الفترة $[1,7]$.

ج) كرِّر حل السؤالين بعد سحب بيان الدالة وحدتين إلى أعلى.

34 g هي الدالة المُعرّفة كما يلي: $g(x)=\int_0^x f(t)dt$، حيث f هي الدالة التي يُظهر الرسم المقابل بيانها.

أ) جد قيمة كل من $g(0)$ ، $g(2)$، $g(4)$، $g(6)$ ، $g(8)$.

ب) جد أوسع فترة تكون الدالة g عليها متزايدة، وأوسع فترة تكون عليها متناقصة.

ج) حدِّد القيم الكبرى والقيم الصغرى لـ g.

في التمرينين 35 وَ 36، جد $F'(x)$.

35 $F(x)=\int_8^x \sqrt[3]{t}\,dt$

36 $F(x)=\int_0^x t\left(t^2+1\right)dt$

37 **أين الخطأ؟** أين الخطأ في الكتابة $\int_{-1}^{1} x^{-2}dx=\left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1}=(-1)-1=-2$.

38 $H(x)=\int_0^x f(t)dt$ حيث f دالّة مستمرة مجالها الفترة $[0, 12]$ وبيانها البيان أدناه.

أ) جد $H(0)$.

ب) على أي فترة تكون H دالّة متزايدة؟ وضِّح جوابك.

ج) على أي فترة يكون بيان H محدّبًا؟ وضِّح جوابك.

د) هل $H(12)$ موجب أم سالب؟ وضِّح جوابك.

هـ) أين تكون للدالّة H قيمة قصوى محلّية؟ وضِّح جوابك.

و) حدِّد طبيعة هذه القيمة القصوى المحلّية. برِّر جوابك.



5–1 التكامل غير المحدّد

1 جد كل تكامل غير محدّد.

أ $\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx$

ب $\int\frac{1+2\cos x}{3}dx$

ج $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

5–2 التكامل المحدّد

2 جد قيمة كل تكامل محدَّد.

أ $\int_{-1}^{0}(2x-1)(x+1)dx$

ب $\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}}(1-|\cos x|dx)$

3 إذا كان $\int_{-1}^{2}f(x)dx=3$ وَ $\int_{-1}^{4}f(x)dx=2$ ، جِد قيمة كل مما يلي:

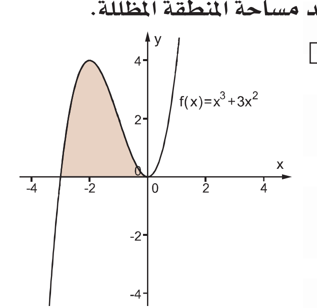
أ $\int_{-1}^{2}(x-2f(x))dx$

ب $\int_{2}^{4}f(x)dx$

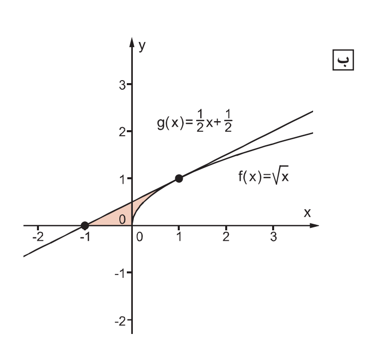
5–2 حساب المساحات

4 جِد مساحة المنطقة المظلَّلة.

أ



ب



5–2 تســـــارع

5 كانت السيارة تسير بسرعة $30m/s$ عندما ضغط السائق على الكابح لتتوقف السيارة بعد ثانيتين. إذا افترضنا أن تسارع السيارة كان ثابتًا خلال فترة الكبح، جِد هذا التسارع والمسافة التي قطعتها السيارة مذ ضغط السائق على الكابح حتى التوقف.

3-5 حساب التـكامل

Integration Methods

الأهداف

- يحسب التكامل المحدّد بطريقة المكاملة بالأجزاء.
- يحسب التكامل المحدّد بطريقة التعويض.

المفردات Vocabulary

المكاملة بالأجزاء Integration by parts

المكاملة بالتعويض Integration by Substitution

تعتبر مسألة حساب التكامل، محدّدًا كان أو غير محدّد، من المسائل الصعبة، قياسًا على حساب المشتقة. فإيجاد الدالّة الأصلية لدالّة معيّنة ليس دائمًا بالأمر المتيسر. غير أن هناك طرائق مختلفة توصل إليها الرياضيون لتجاوز العقبات في هذه المجال.

إلى جانب استعمال القواعد الأساسية لإيجاد التكامل، والتي وردت في السابق، هناك طريقتان يمكن اللجوء إليهما في كثير من الحالات، وهما طريقة المكاملة بالأجزاء، وطريقة المكاملة بالتعويض.

المكاملة بالأجزاء

أدخل لايبنز Leibniz الكتابة التالية: إذا كانت $u(x)$ دالّة بدلالة x، فإن $du=u'(x)dx$ وسمّى du **تفاضل** الدالّة $u(x)$، كما سمّى dx **تفاضل** x. سوف نستعمل هذه الكتابة لأنها تجعل عرض موضوعَ هذا الدرس سهلاً.

تنطلق طريقة **المكاملة بالأجزاء** من قاعدة الاشتقاق لناتج ضرب دالتين. تعلمت أن $(uv)'=uv'+vu'$

ينتج من ذلك أن:

$$d(uv)=(uv)'dx=(uv'+vu')dx=uv'dx+vu'dx=udv+vdu$$

وبالتالي فإن:

$$u(x)v(x)=\int[u(x)v(x)]'dx=\int(u(x)v'(x)+v(x)u'(x))dx$$

$$=\int u(x)v'(x)dx+\int v(x)u'(x)dx$$

يُكتب ما سبق على الصورة

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$$

أو

$$\int udv=uv-\int vdu$$

يعتمد النجاح في استعمال هذه الطريقة على حسن تحديد كل من u وَ dv. حاول دائما أن تختار u بحيث تكون مشتقتها أقل تعقيدًا منها.

مثـــال 1 مكاملة بالأجزاء

جد $\int xe^x dx$.

الحـل

من الواضح أن مشتقّة الدالّة $f(x)=x$ أبسط من الدالّة نفسها. اختر إذن، $u=x$ وَ $dv=e^x dx$

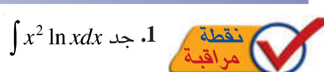
جد، بعد ذلك، du وَ v. لديك $u'(x)=1$ وَ $du=u'(x)dx=dx$ من ناحية،

وَ $v(x)=\int v'(x)dx=\int e^x dx=e^x$ من ناحية أخرى.

استعمل الآن قاعدة المكاملة بالأجزاء.

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$\int xe^x dx=xe^x-\int(1)e^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=e^x(x-1)+C$$



نقطة مراقبة **1.** جد $\int x^2 \ln x dx$

مثـــال 2 مكاملة دالّة من حد وحيد

جد $\int_1^e \ln x dx$.

الحـل

ابدأ بإيجاد التكامل غير المحدّد $\int \ln x dx$. من الواضح أن مشتقّة الدالّة $f(x)=\ln x$ أبسط من الدالّة نفسها. اختر إذن، $u=\ln x$ وَ $dv=dx$. جِد، بعد ذلك، du وَ v . لديك $du=u'(x)dx=\frac{1}{x}dx$ وَ $v=\int dx=x$. استعمل الآن قاعدة المكاملة بالأجزاء.

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$\int \ln x dx = x\ln x-\int\left(\frac{1}{x}\right)(x)dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x -1)+C$$

احسب الآن التكامل المحدّد.

$$\int_1^e \ln x dx = [x(\ln x-1)]_1^e = (e)(\ln(e)-1)-(1)(\ln(1)-1)=e(1-1)-(0-1)=1$$



نقطة مراقبة 2. جد $\int_1^3 \ln 3x dx$

المكاملة بالتعويض

تستند فكرة المكاملة بالتعويض إلى قاعدة مشتقّة الدالّة المركّبة وإلى استعمال كتابة لايبنز Leibniz: إذا كان $u=g(x)$ فإن $du=g'(x)dx$. عندها تكون:

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C=F(g(x))+C$$

مثـــال 3 مكاملة بالتعويض

جد $\int 2x(x^2+1)^2 dx$

الحـل

من الواضح أن الاستبدال $u=x^2+1$ يُنتج $du=2xdx$ وبالتالي فإن:

$$\int 2x(x^2+1)^2 dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}(u)^3+C=\frac{1}{3}(x^2+1)^3+C$$

نقطة مراقبة 3. جد $\int 2x\sqrt{x^2-1}dx$

مثـــال 4 حساب تكامل محدّد بالتعويض

جد $\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx$

الحـل

ابدأ بإيجاد التكامل غير المحدَّد $\int x(x^2+1)^3 dx$. من الواضح أن التعويض $u=x^2+1$ يُنتج $du=2xdx$ أو $xdx=\frac{1}{2}du$. ينتج مما سبق أن:

$$\int x(x^2+1)^3 dx=\int \frac{1}{2}u^3 du=\frac{1}{2}\int u^3 du=\frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]$$

احسب الآن التكامل المحدَّد.

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx=\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}$$



نقطة مراقبة 4. جد $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx$

3-5 التمـاريــن

في التمارين من 1 إلى 4، اربط الدالّة بالتكامل المناسب من بين التكاملات غير المحدَّدة التالية.

أ $\int \ln x dx$ ب $\int x \sin x dx$ ج $\int x^2 e^x dx$ د $\int x^2 \cos x dx$

1 $f(x) = \sin x - x\cos x$ **2** $f(x) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

3 $f(x) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x$ **4** $f(x) = -x + x\ln x$

في التمارين من 5 إلى 8، عيّن u و dv تمهيدًا للمكاملة بالأجزاء (إجراء المكاملة غير مطلوب).

5 $\int xe^{2x} dx$ **6** $\int (\ln x)^2 dx$ **7** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ **8** $\int x^2 \cos x dx$

في التمرينين 9 و 10، ميّز $g(x)$ في $\int f(g(x))g'(x)dx$.

9 $\int 10x(5x^2+1)^2 dx$ **10** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

في التمارين من 11 إلى 13، جِد التكامل غير المحدَّد بالطريقة الأنسب.

11 $\int (x^2-1)e^x dx$ **12** $\int x\sqrt{x-1} dx$ **13** $\int x\cos x dx$

في التمارين من 14 إلى 16، جِد الدالة الأصلية لِ f والتي تمر في النقطة المحدَّدة.

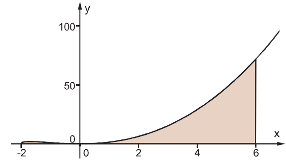
14 $f(x) = x\cos\frac{x}{2}$ ، $(0,3)$ **15** $f(x) = 2x(4x^2-10)^2$ ، $(2,10)$ **16** $f(x) = -2x\sqrt{8-x^2}$ ، $(2,7)$

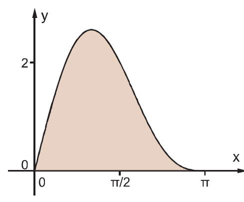
احسب التكامل المحدّد.

17 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

في التمرينين 18 و 19، جِد مساحة المنطقة المظلَّلة.

18 $\int_{-2}^{6} x^2 \sqrt[3]{x+2} dx$ **19** $\int_0^{\pi} (2\sin x + \sin 2x) dx$





20 استعمل $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$ لاستنتاج قيمة كل تكامل محدّد من دون مكاملة.

أ $\int_{-2}^{0} x^2 dx$ ب $\int_{-2}^{2} x^2 dx$ ج $\int_0^2 -x^2 dx$ د $\int_{-2}^{0} 3x^2 dx$

حول المفاهيم

21 $u(x) = 5 - x^2$. أوضح لماذا الكتابة $\int x(5-x^2)^3 dx = \int u^3 du$ غير صحيحة.

22 أوضح لماذا $\int_{-2}^{2} x(x^2+1)^2 dx = 0$ من دون مكاملة.

23 جِد $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx$ باستعمال:

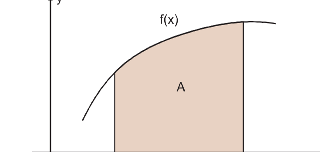
أ المكاملة بالأجزاء مع $dv = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$ ب المكاملة بالتعويض مع $u = 4 + x^2$

4-5 تطبيقات التكامل
Applications of Integral

الأهداف

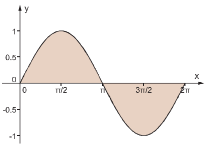
- يستعمل التكامل المحدَّد ليحسب مساحة.
- يستعمل التكامل المحدّد ليحسب حجمًا.

حساب المساحة



تعلمت في الدروس السابقة أن التكامل المحدّد يساعدك على حساب مساحة المنطقة المحدودة ببيان الدالة والمحور x من ناحية، والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ حيث $a<b$ ، من ناحية أخرى.

لكننا لم نتوقف عند تفصيل مهم وهو أن الدالة موجبة على الفترة $[a,b]$ أي $f(x)>0$ أيًّا تكن قيمة x في هذه الفترة. لكي تفهم أهمية هذا الأمر، احسب $\int_0^{\pi} \sin x dx$ وَ $\int_0^{2\pi} \sin x dx$.



$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -[\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2$$

تُبيّن لك النتائج السابقة أن $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ مما يعني أن قيمة التكامل $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$ عدد سالب.
يدفعنا هذا الأمر إلى التفريق بين حالة تكون الدالة فيها غير سالبة على الفترة $[a,b]$ حيث $a<b$ ، وحالة تكون فيها غير موجبة على هذه الفترة.

حساب المساحة

إذا كان a وَ b عددان حقيقيان يُحققان $a<b$ ، فإن مساحة المنطقة التي يحدها بيان الدالّة $f(x)$ والمحور x والمستقيمان $x=a$ وَ $x=b$ تُساوي $\int_a^b |f(x)| dx$.

لحساب مساحة المنطقة المحدودة ببيان الدالّة f والمحور x والمستقيمين $x=a$ وَ $x=b$ ، عليك البدء بتقسيم الفترة $[a,b]$ إلى أجزاء بحيث تحتفظ الدالّة بإشارتها على كل جزء. بعد ذلك، احسب مساحة كل جزء آخذًا في الحسبان ما سبق ثم اجمع هذه المساحات.

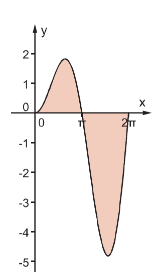
بالعودة إلى مساحة المنطقة المحدودة ببيان الدالة $f(x)=\sin x$ والمحور x والمستقيمين $x=0$ وَ $x=2\pi$ ، فإن هذه المساحة تساوي $\int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 2-(-2)=4$.

مثال 1 حساب مساحة

جِد مساحة المنطقة المحدودة ببيان الدالّة $f(x)=x\sin x$ والمحور x والمستقيمين $x=0$ و $x=2\pi$.

الحل

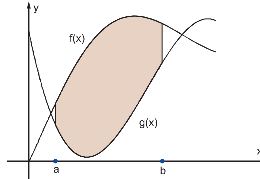
ابدأ بإيجاد دالّة أصلية للدالّة f . سبق أن وجدت أن الدالّة $F(x)=\sin x - x\cos x$ دالّة أصلية للدالّة $f(x)=x\sin x$. بعد ذلك، ارسم بيان الدالّة لتحدّد كيفية تقسيم الفترة $[0,2\pi]$.
الدالة غير سالبة على الفترة $[0, \pi]$ وغير موجبة على الفترة $[\pi, 2\pi]$.
ينتج من ذلك أن مساحة المنطقة المظلّلة A تساوي



$$\int_0^{2\pi} |x\sin x|dx = \int_0^{\pi} x\sin x dx \int_{\pi}^{2\pi} (-x\sin x)\,dx$$
$$= \int_0^{\pi} x\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\, dx$$
$$= [\sin x - x\cos x]_0^{\pi} - [\sin x - x\cos x]_{\pi}^{2\pi}$$
$$= [\sin\pi - \pi\cos\pi] - [\sin 0 - 0\cos 0]$$
$$-[[\sin(2\pi) - (2\pi)\cos(2\pi)] - [\sin\pi - \pi\cos\pi]]$$
$$= \pi - 0 - [-2\pi - (\pi)] = 4\pi$$



1. جد مساحة المنطقة المحدودة ببيان الدالة $f(x)=\cos x$ والمحور x من ناحية والمستقيمين $x=-\pi$ و $x=\pi$.



المساحة بين بيانَي دالّتين

لحساب مساحة المنطقة المحدودة ببيانَي الدالّتين $f(x)$ وَ $g(x)$ من ناحية، والمستقيمين $x=a$ وَ $x=b$ ، حيث $a<b$ ، من ناحية أخرى، استعمل ما يلي:

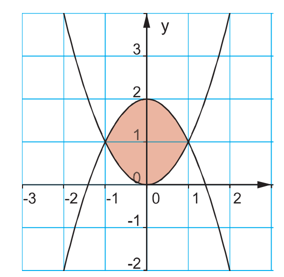
حساب المساحة بين بيانَي دالّتين

إذا كانت f وَ g دالّتين متّصلتين تحقّقان $f(x)\geq g(x)$ على الفترة $[a,b]$ ، فإن مساحة المنطقة المحدودة ببيانَي الدالّتين $f(x)$ وَ $g(x)$ من ناحية والمستقيمَين $x=a$ وَ $x=b$ ، حيث $a<b$ من ناحية أخرى، تساوي

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

مثــــال 2 حساب مساحة المنطقة المحدودة بدالتين

جِد مساحة المنطقة التي يحدها الدالّتين $f(x)=-x^2+2$ وَ $g(x)=x^2$.



الحــل

ابدأ بإيجاد إحداثيي نقطتي تقاطع الدالّتين. للأجل ذلك، حُلّ المعادلة $f(x)=g(x)$.

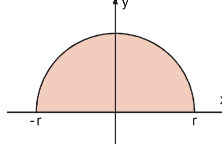
ستجد حلّين $x=-1$ وَ $x=1$. المساحة المحدودة بالبيانين هي

$$A=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{1}(2-2x^2)dx=\left[2x-\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left[2(1)-\frac{2}{3}(1)^3\right]-\left[2(-1)-\frac{2}{3}(-1)^3\right]=2-\frac{2}{3}-\left(-2+\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}$$



2. جد مساحة المنطقة التي يحدها بيانا الدالّتين $f(x)=\cos x$ وَ $g(x)=x^2$.

مثــــال 3 مساحة الدائرة



استعمل التكامل لتحسب مساحة دائرة نصف قطرها r .

الحــل

لا يغيّر في النتيجة أن تضع مركز الدائرة في نقطة الأصل، ممّا يجعل معادلة الدائرة $x^2+y^2=r^2$. يكفيك أن تجد مساحة نصف الدائرة الموجود فوق المحور x . هذه المساحة A هي مساحة المنطقة الواقعة بين بيانَي الدالّتين $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ وَ $g(x)=0$ من ناحية

والمستقيمين $x=-r$ وَ $x=r$ من ناحية أخرى.

$$A=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

لإيجاد هذا التكامل، غيّر المتغيّر كما يلي: $x=r\cos t$. إذن $dx=-r\sin t dt$ وبالتالي فإن:

$$A=\int_{\pi}^{0}\sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}(-r\sin t)dt=\int_{\pi}^{0}-r^2\sqrt{1-\cos^2 t}\sin t dt=r^2\int_{0}^{\pi}\sin^2 t dt$$

$$=r^2\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{r^2}{2}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{r^2}{2}[\pi-0]=\frac{\pi r^2}{2}$$

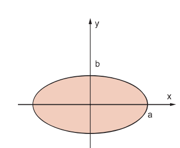
وبالتالي، مساحة الدائرة هي πr^2 .

تـذكّـرْ

لكي يأخذ x جميع قيم الفترة $[-r, r]$، يجب أن يأخذ t جميع قيم الفترة $[\pi, 2\pi]$ مما يجعل الحد الأدنى الجديد للتكامل π ، وحدة الأعلى 2π .

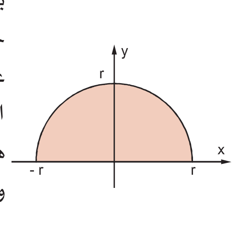
نقطة مراقبة

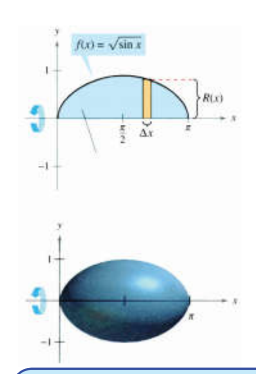
3. القطع الناقص المقابل منحنٍ مغلق معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. سوف تتعلّم هذا النوع من المنحنيات في فصل لاحق. بيّن أن مساحة هذا القطع الناقص هي πab .



حساب الحجوم

يُستعمل التكامل المحدّد في حساب الحجم. سوف تتعلّم حالة من حالات حساب الحجوم، وهي حالة حجم الجسم الذي تحصل عليه لو أدرت حول المحور x دورة كاملة في الفضاء الثلاثي الأبعاد، جزءًا من بيان دالّة $f(x)$ ، على فترة $[a, b]$. مثال على هذا الأمر: الكرة. فأنت تحصل على الكرة التي نصف قطرها r ومركزها في نقطة الأصل عن طريق إدارة نصف الدائرة العلوي $x^2+y^2=r^2$ حول المحور x دورة كاملة.





يتم حساب حجم مثل هذا الجسم باستعمال القاعدة التالية:

حساب حجم جسم دوراني

إذا كانت f دالّة مستمرة فإن حجم الجسم الناتج عن الدوران، حول المحور x دورة كاملة في الفضاء الثلاثي الأبعاد، لجزء من بيان دالّة $f(x)$ ، على الفترة $[a,b]$، يُحسب وفقًا للقاعدة

$$V=\pi\int_{a}^{b}\left(f(x)\right)^2 dx$$

مثـــال 4 حجم الكرة

جِد حجم كرة نصف قطرها r.

الحـل

لا يغيّر في النتيجة أن تضع مركز الكرة في نقطة الأصل. بما أن الكرة التي نصف قطرها r ومركزها في نقطة الأصل هي نتيجة دوران نصف الدائرة $x^2+y^2=r^2$ العلوي حول المحور x دورة كاملة، فإن حجمها هو قيمة التكامل:

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(f(x))^2 dx=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi\int_{-r}^{r}r^2dx-\pi\int_{-r}^{r}x^2dx$$

$$=\pi\left[r^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}=\pi\left[r^3-(-r^3)-\tfrac{1}{3}\left(r^3-(-r)^3\right)\right]=\pi\left[2r^3-\tfrac{2}{3}r^3\right]=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

إذن، حجم كرة نصف قطرها r هو $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

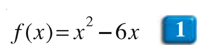
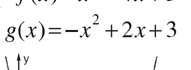
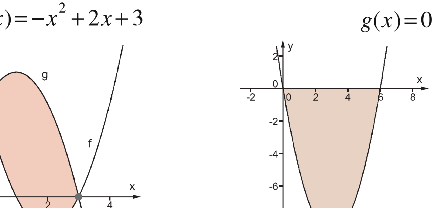
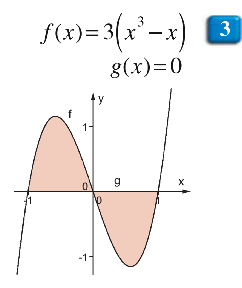
4-5 التمـاريـــن

في التمارين من 1 إلى 3، اكتب التكامل المحدّد الذي يُعطيك مساحة المنطقة المظلّلة.

1 $f(x)=x^2-6x$ ، $g(x)=0$

2 $f(x)=x^2-4x+3$ ، $g(x)=-x^2+2x+3$

3 $f(x)=3\left(x^3-x\right)$ ، $g(x)=0$

في التمارين من 4 إلى 6، تظهر الدالّة موضوع المكاملة على صورة فرق دالتين. ارسم بيان كل دالة وظلّل المنطقة التي يُمثّل التكامل مساحتها.

4 $\int_0^4\left[(x+1)-\frac{x}{2}\right]dx$

5 $\int_2^3\left[4\left(\frac{x^3}{3}-x\right)-\frac{x}{3}\right]dx$

6 $\int_0^1\left[e^x(-x+1)\right]dx$

في التمرينين 7 و 8، اختر القيمة التي تشكّل التقدير الأفضل لمساحة المنطقة المحدودة ببيانَي الدالّتين.

7 $f(x)=x+1$ ؛ $g(x)=(x-1)^2$ ؛ أ -2 ب 2 ج 10 د 4 هـ 8

8 $f(x)=2-\frac{1}{2}x$ ؛ $g(x)=2-\sqrt{x}$ ؛ أ 1 ب 6 ج -3 د 3 هـ 4

في التمارين من 9 إلى 12 جِد مساحة المنطقة التي يحدّها المحور x وبيان الدالّة، والمستقيمان $x=a$ و $x=b$.

9 $f(x)=\sin x$ ؛ $a=0$ ؛ $b=\pi$

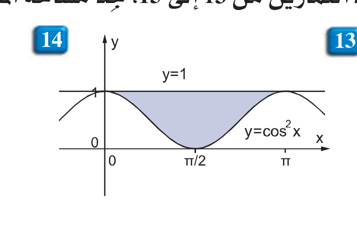
10 $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ؛ $a=-\frac{\pi}{4}$ ؛؛ $b=\frac{\pi}{4}$

11 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ؛ $a=-3$ ؛ $b=3$

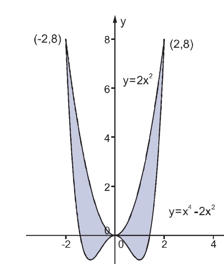
12 $f(x)=e^{2x}$ ؛ $a=0$ ؛ ؛ $b=1$

في التمارين من 13 إلى 15، جِد مساحة المنطقة المظلّلة.

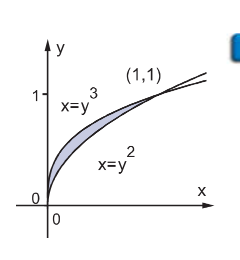
13



14



15



في التمارين من 16 إلى 21 ، حدّد نقاط تقاطع بيانَي الدالتين، ثم جِد مساحة المنطقة التي يحدّانها.

16 $f(x)=x^2-2$ ؛ $g(x)=2$

17 $f(x)=7-2x^2$ ؛ $g(x)=x^2-4$

18 $x+y^2=0$ ؛ $x+3y^2=2$

19 $x+y^2=3$ ؛ $4x+y^2=0$

20 $f(x)=8\cos x$ ؛ $g(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ؛ $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$

21 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ؛ $g(x)=x$

في التمرينين 20 و 21 ، جِد قيمة b بحيث يقسم المستقيم $y=b$ المنطقة المحدودة ببيانَي الدالّتين إلى قسمين متساويين في المساحة.

20 $f(x)=9-x^2$ ؛ $g(x)=0$

21 $f(x)=9-|x|$ ؛ $g(x)=0$

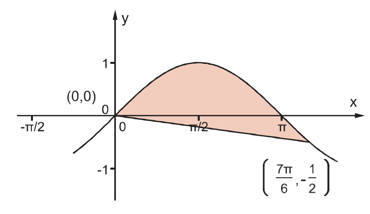
صواب أم خطأ؟ في التمارين من 22 إلى 24 ، اذكر إن كانت المقولة صوابًا فعلّله، أو خطأ فأثبته بمثال مضاد.

22 إذا كانت مساحة المنطقة المحدودة ببيانَي الدالّتين f و g تساوي 1، فإن مساحة المنطقة المحدودة بالدالّتين $h(x)=f(x)+c$ و $k(x)=g(x)+c$ تساوي 1 أيضًا.

23 إذا كان $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=A$ فإن $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx=-A$.

24 إذا تقاطع بيانا f و g في نقطة يقع إحداثيّها x في المنتصف بين a و b فإن $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=0$.

25 **مساحة** جِد المساحة المحدودة ببيان الدالّة $f(x)=\sin x$ والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ كما يُبين ذلك الرسم المقابل.



في التمارين من 26 إلى 29 ، جِد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة ببيانات المعادلات حول المحور x.

26 $y=x^2$ ، $y=0$ ، $x=2$

27 $y=\sqrt{9-x^2}$ ، $y=0$

28 $y=x$ ، $y=1$ ، $x=0$

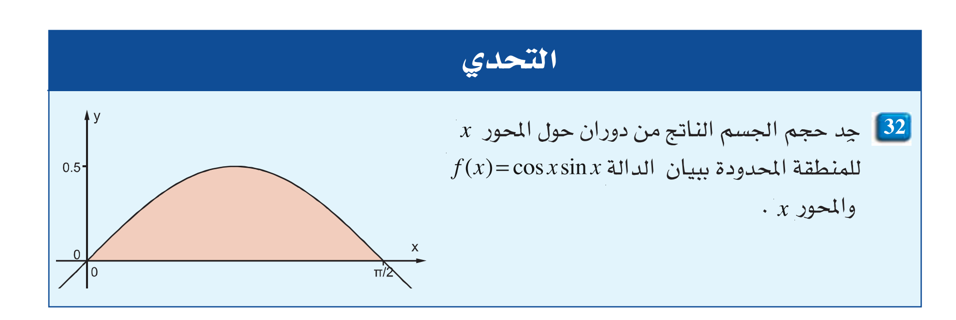
29 $y=x^2+1$ ، $y=x+3$

30 استعمل التكامل لحساب حجم الجسم الناتج من دوران مثلث رؤوسه $(0, 0)$ ، $(b, 0)$ ، $(0, h)$ حول المحور x.

31 استعمل التكامل لتكتب قاعدة تحسب حجم مخروط نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h.

التحدي

32 جِد حجم الجسم الناتج من دوران حول المحور x للمنطقة المحدودة ببيان الدالة $f(x)=\cos x \sin x$ والمحور x.



الفصل 5

مراجعة الفصل

في التمارين من 1 إلى 4، جِد التكامل غير المحدَّد.

1 $\int (2x^2+x-1)dx$

2 $\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x}}dx$

3 $\int \frac{x^3+1}{x^2}dx$

4 $\int \left(5\cos x-\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$

5 **سرعة وتسارع** أقلعت طائرة بعد أن قطعت مسافة 1 350 m على المدرج. انطلقت الطائرة من نقطة الوقوف وسارت بتسارع ثابت مدة 30 ثانية قبل أن تقلع. كم كانت سرعتها عند الإقلاع؟

6 **سرعة وتسارع** قُذفت كرة عموديًّا نحو الأعلى من مستوى الأرض بسرعة أصلية مقدارها 30 m/s .

أ كم سيمضي من الوقت قبل أن تبلغ الكرة أعلى نقطة ممكنة لها؟

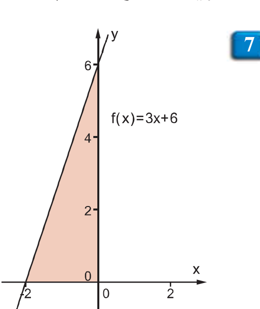
ب ما ارتفاع هذه النقطة؟

ج متى تكون سرعة الكرة نصف سرعتها الأصلية؟

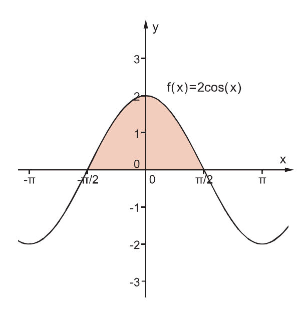
د ما ارتفاع الكرة عندما تكون سرعتها نصف سرعتها الأصلية؟

في التمرينين 7 و 8، اكتب تكاملاً محدّدًا لتحسب المساحة المظلّلة.

7



8



في التمرينين 9 و 10، ارسم المنطقة التي يُشكّل التكامل المحدد مساحتها.

9 $\int_0^5 (5-|x-5|)dx$

10 $\int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$

11 احسب كلاً مما يلي، علمًا بأن $\int_2^6 f(x)dx=10$ وَ $\int_2^6 g(x)dx=3$.

أ $\int_2^6 [f(x)+g(x)]dx$

ب $\int_2^6 [f(x)-g(x)]dx$

ج $\int_2^6 [2f(x)-3g(x)]dx$

د $\int_2^6 5f(x)dx$

12 احسب كلاً مما يلي، علمًا بأن $\int_0^3 f(x)dx=4$ وَ $\int_3^6 f(x)dx=-1$.

أ $\int_0^6 f(x)dx$

ب $\int_6^3 f(x)dx$

ج $\int_4^4 f(x)dx$

د $\int_3^6 -10f(x)dx$

في التمارين من 12 إلى 15، ارسم المنطقة التي يُشكِّل التكامل المحدَّد مساحتها، واحسب هذه المساحة.

12 $\int_0^3 (2x+1)dx$

13 $\int_0^1 (x-x^3)dx$

14 $\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)dx$

15 $\int_3^4 (x^2-9)dx$

في التمارين من 16 إلى 19، جِد التكامل غير المحدّد.

16 $\int (x^2+1)^3 dx$

17 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+3}}dx$

18 $\int \sin^3 x \cos x dx$

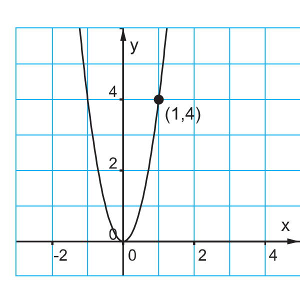
19 $\int \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}d\theta$

20 جد القيمة الوسطى للدالّة $f(x)$ على الفترة I.

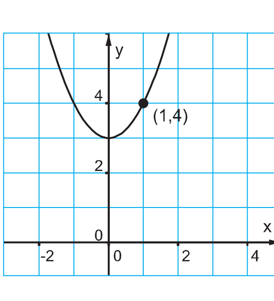
أ $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $I=[0,4]$

ب $f(x)=a\sqrt{x}$ ؛ $I=[0,a]$

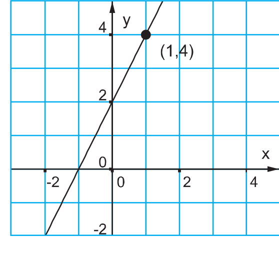
21 **اكتب** أي مما يلي بيان الدالّة f، التي تحقّق $f'(x)=2x$ و $f(1)=4$ ؟ وضِّح جوابك.



(أ)



(ب)



(ج)

الفصل 5

تحضيــر للاختبــار

1 إذا كان $\int_a^b f(x)dx = a+2b$ فإن قيمة التكامل $\int_a^b [f(x)+3]dx$ هي:

أ $a+2b+3$ ب $3b-3a$ ج $4a-b$
د $5b-2a$ هـ $5b-3a$

2 ما قيم k التي تجعل $\int_2^k x^2 dx = 0$ ؟

أ -2 ب 0 ج 2
د -2 وَ 2 هـ -2 وَ 0 وَ 2

3 أي مما يلي يساوي $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$ ؟

أ 0 ب 1 ج $f'(x)$
د $f(x)$ هـ غير ذلك

4 أي مما يلي يساوي مساحة المنطقة المحدودة ببيانَي الدالّتين $y=x^2$ وَ $y=-x$ من ناحية، والمستقيمين $x=0$ وَ $x=3$ من ناحية أخرى؟

أ 2 ب $\frac{9}{2}$ ج $-\frac{9}{2}$
د 13 هـ $\frac{27}{2}$

5 مساحة المنطقة التي يحدها بيانا الدالّتين $f(x)=x^2$ وَ $g(x)=-x$ هي المستقيمان $x=-1$ وَ $x=1$ هي:

أ $\frac{1}{2}$ ب $\frac{5}{6}$ ج $-\frac{1}{2}$
د $\frac{1}{3}$ هـ $\sqrt{2}$

6 أي مما يلي يُعطي مساحة المنطقة المحدودة ببيانَي الدالّتين $f(x)=e^x$ وَ $g(x)=\frac{1}{x}$ من ناحية والمستقيمين $x=1$ وَ $x=2$ من ناحية أخرى ؟

أ $e^2-e-\ln 2$ ب $\ln 2 - e^2 + e$ ج $e^2 - \frac{1}{2}$
د $e2-e-\frac{1}{2}$ هـ $\frac{1}{2} - \ln 2$

الفصل

6

القطوع المخروطية
Conic Sections

الفصل السادس

الدروس

تدور كواكب المجموعة الشمسية حول الشمس في مدارات تتخذ شكل القطع الناقص، تؤدي فيها الشمس دور البؤرة. أكثر هذه المدارات شبه دائرية. مدار بلوتو Pluto أقل دائرية من غيره، كذلك عطارد Mercury. هناك مدارات لها شكل قطع ناقص طويل مثل مدار النجم الصغير إيكار Icarus، وهو نجم صغير يبلغ عرضه أكثر قليلاً من 1,5 km وهو يدور حول الشمس مرة كل 409 أيام أرضية.

هل أنت مستعد؟

المُفْرَدات

1 اربط كل عبارة في العمود الأيمن بتفسيرها في العمود الأيسر.

1. الدائرة	أ مستقيم يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين.
2. القطع المكافئ	ب مستقيم يقسم الدائرة إلى قسمين متطابقين.
3. منصّف الزاوية	ج مجموعة نقاط مستوٍ تقع على مسافة واحدة من نقطة معيّنة.
4. المحاذي الأفقي	د بيان دالّة تربيعية.
	هـ مستقيم أفقي يقترب منه بيان الدالة عندما يسعى x إلى $\pm\infty$.

الدائرة

في التمارين من 2 إلى 5، حدّد مركز الدائرة ونصف قطرها.

2 $x^2+y^2=49$

3 $x^2+(y+1)^2=25$

4 $(x-5)^2+y^2=15$

5 $(x-2)^2+(y+3)^2=36$

في التمارين من 6 إلى 9، اكتب معادلة الدائرة.

6 المركز: $(0, 3)$ ؛ نصف القطر : $\sqrt{5}$

7 المركز: $(0, 0)$ ؛ نصف القطر: 8

8 المركز: $(5, 0)$ ؛ نصف القطر: 13

9 المركز: $(5, -3)$ ؛ نصف القطر : $\sqrt{2}$

قانون المسافة

في التمارين من 10 إلى 12، جِد المسافة بين النقطتين.

10 $(0, 2)$ وَ $(4, 5)$

11 $(3,-5)$ وَ $(-2,-10)$

12 $(-5, 1)$ وَ $(3, 6)$

في التمارين من 13 إلى 16، جِد المسافة بين النقطة والمستقيم.

13 النقطة: $(3, 5)$ ؛ المستقيم : $y=-5$

14 النقطة: $(-7, -9)$ ؛ المستقيم : $x=2$

15 النقطة: $(3, 3)$ ؛ المستقيم : $x+y=1$

16 النقطة: $(-2, 3)$ ؛ المستقيم : $y=-2x+5$

إكمال المربَّع

في التمارين من 17 إلى 20، أكمل المقدار ليُصبح مربّعًا كاملاً.

17 $3x^2+6x$

18 $5y^2+20y$

19 x^2+x

20 y^2-3y

1-6 القطوع المخروطية
Conic Sections

الأهداف
- يُعرّف القطوع المخروطية.
- يكتب معادلة القطع المكافئ ويُحدِّد عناصره.
- يكتب معادلة القطع الناقص ويحدِّد عناصره.
- يكتب معادلة القطع الزائد ويحدِّد عناصره.
- يرسم القطوع المخروطية.

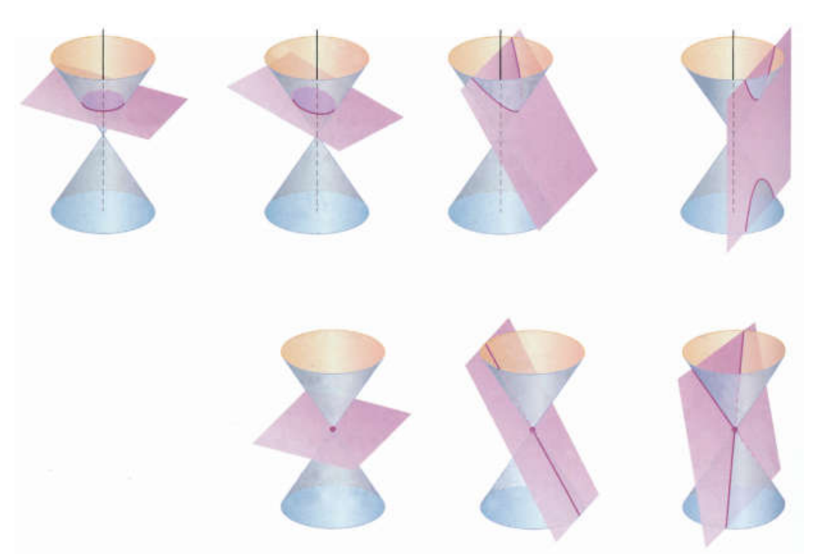
المفردات Vocabulary

قطع مكافئ	Parabola
قطع ناقص	Ellipse
قطع زائد	Hypebola
بؤرة	Focus
دليل	Directrix
رأس	Vertex
محور بؤري	Focal axis
المحور الكبير	Major axis
المحور الصغير	Minor axis
المحور الحقيقي	Real axis
المحور المرافق	Conjugate axis

تشكِّل القطوع المخروطية مسارات الكواكب والأقمار والأجسام الأخرى (بما فيها الإلكترونات) التي تتحدَّد حركتها بقوة تتناسب عكسيًّا مع تربيع المسافة. ما إن تعلم أن مسار جسم متحرِّك هو قطع مخروطي معيّن حتى تتوفر لك معلومات حول سرعة هذا الجسم والقوة التي تحرِّكه. سوف تتعلم، في هذا الفصل، الارتباط بين القطوع المخروطية والمعادلات التربيعية بمتغيِّرين. كما ستتعلم كيف تُصنَّف القطوع المخروطية وفق اختلافها المركزي Eccentricity (مسار الكوكب بلوتو Pluto له اختلاف مركزي شديد، بينما يكاد مسار الأرض أن يكون دائريًّا).

القطوع المخروطية

عرّف العلماء الإغريق أيام أفلاطون القطوع المخروطية على أنها الخطوط المنحنية الناتجة من قطع مخروط مزدوج بمستوٍ. أما اليوم، فيُعرّف العاملون في حقل الرياضيات القطوع المخروطية باستعمال قانون المسافة في المستوي الاحداثي.



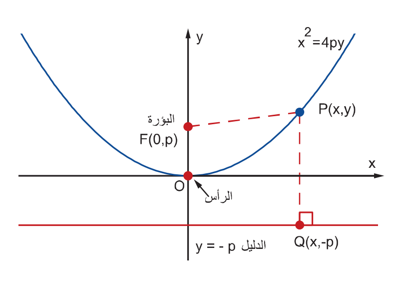
هناك طرائق عدّة لتعريف القطوع المخروطية. يُمكنك تعريفها كنتائج قطع مخروط مزدوج بمستوٍ، كما فعل الإغريق. ويُمكنك تعريفها جبريًّا على أنها التمثيل البياني لمعادلة الدرجة الثانية بمتغيِّرين.

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

ويُمكنك أيضًا تعريفها على أنها مجموعة نقاط المستوي التي تحقِّق خاصّية هندسية معيّنة. أبسط مثال على هذه الطريقة هو تعريف الدائرة باعتبارها مجموعة نقاط المستوي التي تقع على البعد نفسه من نقطة معيّنة.



القطع المكافئ

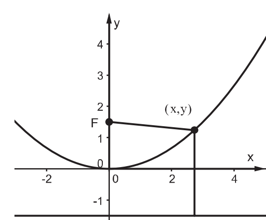


تعلّمت في الصف العاشر أن بيان الدالّة التربيعية قطع مكافئ. سوف تتعلّم في هذا الدرس خاصّية أساسية تُستعمل لإعطاء تعريف هندسي له. القطع المكافئ هو أحد القطوع المخروطية الأساسية، وهو يتمتع بالخاصية الانعكاسية، مما يجعل ميدان استعماله واسعًا.

القطع المكافئ Parabola

القطع المكافئ مجموعة نقاط المستوي التي تقع على البعد نفسه من نقطة معيّنة تُسمّى **البؤرة**، ومن مستقيم لا يمر بها يُسمّى **الدليل**. النقطة التي تقع في الوسط بين البؤرة والدليل هي **رأس** القطع المكافئ، أما المستقيم الذي يمر في البؤرة والرأس فهو **محور** القطع المكافئ. إذا تأمّلت في الشكل أعلاه الذي يُبيّن قطعًا مكافئًا، ستلاحظ أن القطع المكافئ متناظر حول محوره مما يجعل محوره محور تناظر.

إذا كان رأس القطع المكافئ في نقطة الأصل وكان دليله المستقيم الأفقي $y=p$ ، فإن بؤرته تقع في النقطة $F(0, p)$. تقع نقطة (x, y) من نقاط المستوي الإحداثي على القطع المكافئ إذا كان بعدها عن البؤرة يُساوي بعدها عن الدليل.



يُساوي بعد النقطة عن البؤرة $\sqrt{x^2+(y-p)^2}$ ويُساوي بُعدها عن الدليل $y+p$. يُمكن التعبير عن تساوي هاتين المسافتين كما يلي:

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=y+p \quad \text{أو} \quad x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

أو $x^2=4py$

يُمكنك في المقابل أن تُبين أن نقطة يُحقق إحداثياها المعادلة $x^2=4py$ تنتمي إلى القطع المكافئ. نستنتج مما سبق أن معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة $F(0, p)$ ودليله المستقيم $y=p$ هي $x^2=4py$.

تُسمى هذه المعادلة **الصورة المُبسّطة** لمعادلة القطع المكافئ. إذا كان رأس القطع المكافئ في النقطة $F(h, k)$ وكان دليله المستقيم $y=k-p$ ، فإن من الممكن تبيان أن معادلته هي $(x-h)^2=4p(y-k)$ وتُسمى **الصورة العامة** لمعادلة القطع المكافئ.
وفي حالة كان محور القطع المكافئ أفقيًا، فإن معادلته المُبسطة تُكتب على الصورة $y^2=4py$ ومعادلته على الصورة العامة $(y-k)^2=4p(x-h)$.

معادلة القطع المكافئ

الصورة العامّة لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه (h, k) ودليله المستقيم $y=k-p$ ، هي $(x-h)^2=4p(y-k)$. في هذه الحالة محور القطع المكافئ هو المستقيم العمودي $x=h$ وبؤرته النقطة $(h, k+p)$.

الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه (h, k) ودليله المستقيم $x=h-p$ ، هي $(y-k)^2=4p(x-h)$. في هذه الحالة يكون محور القطع المكافئ هو المستقيم الأفقي $y=k$ وبؤرته النقطة $(h+p, k)$.

مثـــال 1 إيجاد عناصر قطع مكافئ

جِد عناصر القطع المكافئ $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ (البؤرة والرأس والدليل والمحور).

الحـل

ابدأ بكتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة العامة أعلاه عن طريق إكمال المربّع.

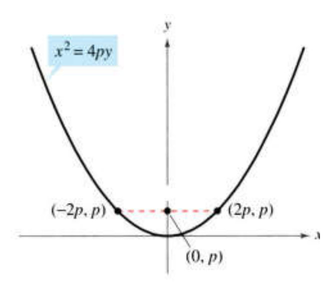
$$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x+1\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow (x+1)^2=-2(y-1)$$

بالمقارنة مع معادلة القطع المكافئ ذي المحور العمودي، نجد أن $h=-1$ ، $k=1$ ، $p=-\frac{1}{2}$.
ينتج من ذلك أن بؤرة القطع المكافئ هي النقطة $(h,\ k+p)=\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ ورأسه النقطة $(h,\ k)=(-1,\ 1)$ ودليله المستقيم $y=k-p=1.5$ ومحوره المستقيم $x=h=-1$.

نقطة مراقبة **1.** جِد عناصر القطع المكافئ $2x+y^2+2y-1=0$.

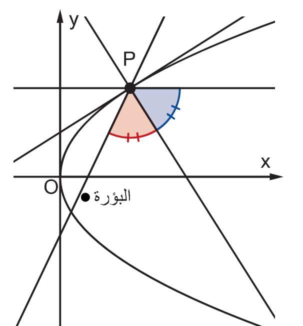
من خصائص القطع المكافئ الأكثر استعمالاً، **خاصيّة العكس**. يقول علماء الفيزياء عن سطح أنه **عاكس** إذا كانت الزاوية التي يكوّنها شعاع ساقط على السطح مع مماسه عند نقطة السقوط متطابقة مع الزاوية التي يكوّنها الشعاع، بعد انعكاسه، مع هذا المماس. تُسمّى الزاوية الأولى **زاوية السقوط** وتُسمّى الثانية **زاوية الانعكاس**. يُشكّل سطح المرآة المنزلية أبسط مثال على سطح عاكس.

هناك نوع آخر من السطوح العاكسة أهمها الصحون المستعملة في التقاط البث التلفزيوني بوساطة الأقمار الصناعية. ينتج هذا السطح من دوران قطع مكافئ حول محوره. تتمتع هذه السطوح بخاصّية مهمّة. فهي تتلقّى الأشعة الساقطة بشكل موازٍ للمحور وتعكسها بحيث تمر في بؤرة القطع المكافئ. كما أن جميع الأشعة التي تبثها البؤرة في اتجاه السطح تنعكس أشعة موازية لمحور القطع المكافئ.



خاصيّة الانعكاس للقطع المكافئ

يُشكل العمود على مماس القطع المكافئ عند نقطة P من نقاطه منصّف الزاوية التي يكوّنها المستقيم المار في هذه النقطة وفي بؤرة القطع المكافئ، مع المستقيم الموازي لمحوره والمار في P.



القطع الناقص

ذكر عالم الفلك البولوني نيكولا كوبرنيكس Nicolas Copernics أن الكواكب، بما فيها الأرض، تدور حول الشمس في مدارات دائرية مركزها الشمس. إلا أن العالم الألماني يوهانس كيبلر Johannes Kepler صحّح نظرية كوبرنيكس الذي بيّن أن الكواكب تدور حول الشمس في مدارات تتّخذ شكل القطع الناقص (Ellipse) وأن الشمس تقع في إحدى بؤرتيه.
يُشكّل استعمال القطوع الناقصة لتفسير حركة الكواكب واحدًا من استعمالاتها. سوف تبدأ دراسة هذا النوع الثاني من القطوع المخروطية، كما بدأت دراسة القطع المكافئ، عبر تعريفه كمجموعة نقاط في

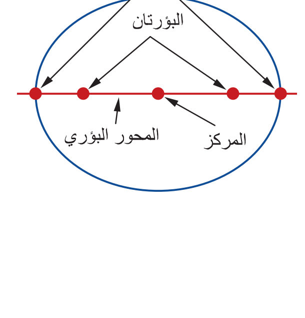
المستوي تحقّق شرطًا معيّنًا. سوف تستعمل في تعريفك للقطع الناقص بؤرتين عوضًا عن بؤرة واحدة، كما كانت حال القطع المكافئ.

تـذكَّـرْ

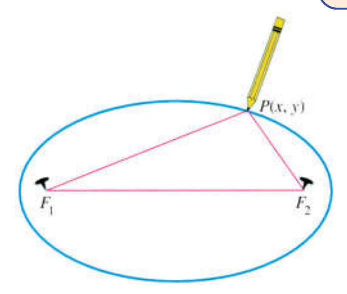
تذكر أن a وَ b وَ c ترتبط بالعلاقة $a^2 = b^2 + c^2$ استنادًا إلى مبرهنة فيثاغورس.

القطع الناقص

القطع الناقص مجموعة نقاط المستوي التي يتّخذ مجموع بعدَيها عن نقطتين معيّنتين قيمة ثابتة. تُسمّى هاتان النقطتان **بؤرتي** القطع الناقص، ويُسمّى المستقيم الذي يمر فيهما **المحور البؤري**. يقطع المحور البؤري القطع الناقص في نقطتين هما رأسا **القطع الناقص**. يُسمّى الوتر الذي يصل بين الرأسين **المحور الكبير**، ويُسمّى منتصفه **مركز** القطع الناقص. كما أن المستقيم المتعامد مع المحور البؤري عند المركز، يقطع القطع الناقص في نقطتين هما **الرأسان الثانويان** للقطع الناقص. يُسمّى الوتر الذي يصل بين الرأسين الثانويين **المحور الصغير** للقطع الناقص.



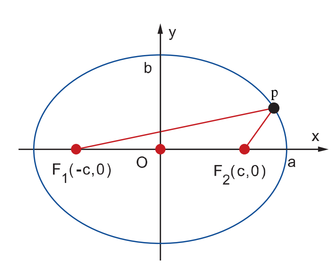
أسهل طريقة لرسم قطع ناقص بمعرفة بؤرتَيْه، هي استعمال تعريفه. خُذ خيطًا طوله يساوي مجموع بعدَي نقطة من نقاط القطع الناقص عن بؤرتَيه، وثبّت طرفَي الخيط عند البؤرتَين F_1 وَ F_2 بدبّوسين. خُذ، بعد ذلك، قلمًا وشُد به الخيط، ثم حرّك القلم فيرسم لك مجموعة النقاط التي يساوي مجموع بعدَيها عن البؤرتَيْن طول الخيط. إنه القطع الناقص المطلوب.



إذا كانت البؤرتان تقعان في النقطتين $F_1(-c, 0)$ وَ $F_2(c, 0)$ وكان $PF_1 + PF_2 = 2a$، فإن إحداثيي نقطة $P(x, y)$ من نقاط القطع الناقص يحقّقان العلاقة

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

لتبسيط هذه المعادلة، اعزل كل جذر في طرف من طرفَيها وربّع، ثم اعزل الجذر المتبقي مرة ثانية وربّع. تحصل في النهاية على المعادلة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$



من ناحية أخرى، يُمكنك أن تُبيّن التالي: إذا حقّق إحداثيا نقطة $P(x, y)$ المعادلة السابقة فإن هذه النقطة تحقّق $PF_1 + PF_2 = 2a$. وهكذا، فإن النقطة $P(x, y)$ تقع على القطع الناقص إذا، وفقط إذا، حقّق إحداثياها المعادلة أعلاه.

بما أن $PF_1 + PF_2 > F_1F_2$ (المتباينة المثلثية العائدة إلى المثلث PF_1F_2) فإن $2a > 2c$ وبالتالي $a > c$. ينتج من ذلك أن العدد $a^2 - c^2$، في المعادلة أعلاه، موجب. إذا سميّنا b الجذر التربيعي للعدد $a^2 - c^2$، تصبح المعادلة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

وهي **الصورة المبسَّطة** لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل. تكشف هذه المعادلة أن القطع الناقص متناظر بالنسبة إلى كل من محوري الإحداثيات ومتناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل. وهو يقع داخل المستطيل المحدَّد بالمستقيمات $x = -a$، $x = a$، $y = -b$، $y = b$. يمس القطع الناقص هذه المستقيمات عند 4 نقاط هي:

- الرأسان $(a, 0)$ ، $(-a, 0)$
- الرأسان الثانويان $(0, -b)$ ، $(0, b)$

أخيرًا، مماسّات القطع الناقص عند هذه النقاط متعامدة مع محورَي الإحداثيات.

لكن إذا كان مركز القطع الناقص لا يقع في نقطة الأصل، فإن معادلته تتّخذ الشكل:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ إذا كان المحور البؤري أفقيًا، والشكل:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$ إذا كان المحور البؤري عموديًا (لاحظ أن $a>b$ دائمًا).

تذكَّر أن النقطة (h, k) هي مركز القطع الناقص.

معادلة القطع الناقص

الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ إذا كان محوره البؤري أفقيًّا

وَ

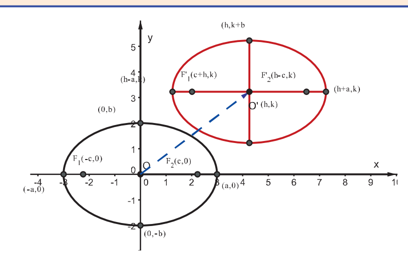
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$ إذا كان عموديًّا.

في هذه المعادلة، a هو نصف المحور الكبير وَ b نصف المحور الصغير، وَ (h, k) المركز.

عناصر القطع الناقص الأخرى هي:

- المسافة بين بؤرة والمركز: c
- الرأسان: $(h\pm a, k)$ إذا كان المحور البؤري أفقيًّا وَ $(h, k\pm a)$ إذا كان عموديًّا.
- الرأسان الثانويان: $(h, k\pm b)$ إذا كان المحور البؤري أفقيًّا وَ $(h\pm b, k)$ إذا كان عموديًّا.
- البؤرتان: $(h\pm c, k)$ إذا كان المحور البؤري أفقيًّا وَ $(h, k\pm c)$ إذا كان عموديًّا.

يُبين الرسم والجدول أدناه العلاقة بين الصورة المُبسّطة لمعادلة القطع الناقص وصورته العامة في حالة كان المحور البؤري أفقيًا:



الصورة المُبسّطة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		الصورة العامة $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	
الرأسان	$(a, 0)$، $(-a, 0)$	الرأسان	$(h+a, k)$، $(h-a, k)$
الرأسان الثانويان	$(0, b)$، $(0, -b)$	الرأسان الثانويان	$(h, k+b)$، $(h, k-b)$
البؤرتان	$(c, 0)$، $(-c, 0)$	البؤرتان	$(h+c, k)$، $(h-c, k)$

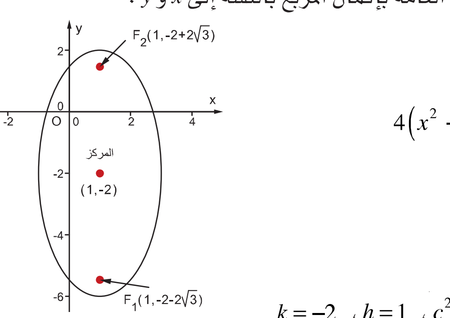
بالنسبة لقطوع الناقصة التي محورها البؤري عمودي، تكون الصورة المُبسّطة للمعادلة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ والصورة العامة $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

مثال 2 إيجاد عناصر قطع ناقص

جد عناصر القطع الناقص $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$.

الحل

حوِّل معادلة القطع الناقص إلى الصورة العامة بإكمال المربّع بالنسبة إلى x وَ y .



$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$$
$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y = 8$$
$$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 4 + 4$$
$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$
$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

تستنتج من هذه المعادلة أن:

$a^2 = 16$ ، $b^2 = 4$ ، $c^2 = a^2 - b^2 = 12$ ، $h = 1$ ، $k = -2$

نصف المحور الكبير: $a = \sqrt{16} = 4$ ، نصف المحور الصغير: $b = \sqrt{4} = 2$ ،

المركز $(h, k) = (1, -2)$. المسافة بين المركز والبؤرة: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

البؤرتان: $(h, k \pm c) = (1, -2 \pm 2\sqrt{3})$

الرأسان الثانويان: $(h \pm b, k) = (1 \pm 2, -2) = \begin{cases}(3, -2)\\(-1, -2)\end{cases}$

الرأسان الأساسيان: $(h, k \pm a) = (1, -2 \pm 4) = \begin{cases}(1, 2)\\(1, -6)\end{cases}$

لا تَنسَ

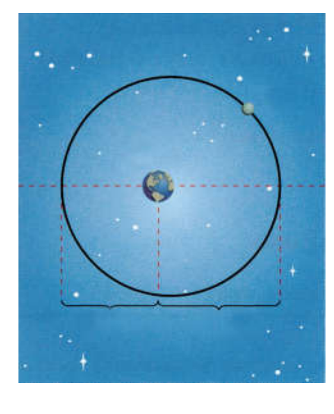
$a>b>0$



نقطة مراقبة

2. جد عناصر القطع الناقص $2x^2 + 3y^2 + 4x + 6y - 1 = 0$

مثال 3 مدار القمر



مدار القمر حول الأرض قطع ناقص تقع إحدى بؤرتيه في مركز الأرض. طول المحور الكبير 768 800 km وطول المحور الصغير 767 640 km. كم تبعد عن مركز الأرض أقصى نقطة وأدنى نقطة يمر بهما القمر؟

الحل

ابدأ بإيجاد a وَ b .

$$2a = 768\,800 \Rightarrow a = 384\,400$$
$$2b = 767\,640 \Rightarrow b = 383820$$

احسب الآن c . $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 21108$

تقع أقصى نقطة يمر بها القمر على مسافة $a + c \approx 405\,508$ km عن مركز الأرض، وتقع أدنى نقطة على مسافة $a - c \approx 363292$ km منه.

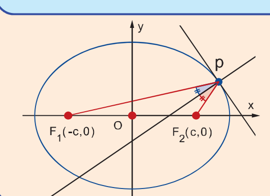


نقطة مراقبة

3. على أي مسافة من مركز الأرض تقع البؤرة الثانية لمدار القمر؟

خاصّية الانعكاس للقطع الناقص

يُشكِّل العمود على مماس القطع الناقص عند نقطة P من نقاطه منصّف الزاوية التي يكوّنها المستقيمان المارّان في هذه النقطة، وفي بؤرتَي القطع الناقص.



القطع الزائد

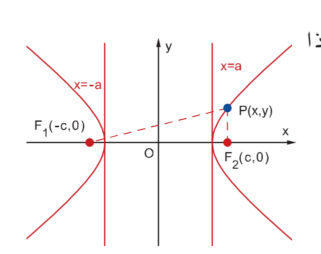
تعريف القطع الزائد مشابه لتعريف القطع الناقص. فكما أن القطع الناقص هو مجموعة نقاط المستوي التي يساوي مجموع بعدَيها عن نقطتين معيّنتين قيمة ثابتة، كذلك القطع الزائد هو مجموعة نقاط المستوي التي يساوي مطلق فرق بعدَيها عن نقطتين معيّنتين قيمة ثابتة.

القطع الزائد

القطع الزائد مجموعة نقاط المستوي التي يساوي مطلق الفرق بين بعدَيها عن نقطتَين معيّنتين قيمة ثابتة. تُسمى هاتان النقطتان **بؤرتَي** القطع الزائد، ويُسمّى المستقيم الذي يمر فيهما **محوره البؤري**. يقطع المحور البؤري القطع الزائد في نقطتين هما **رأسا القطع الزائد**. تُسمّى القطعة المستقيمة التي تصل بين الرأسين **المحور الحقيقي**، ومنتصفها **مركز** القطع الزائد. كما يُسمّى المستقيم المتعامد مع المحور البؤري عند المركز **المحور المرافق** للقطع الزائد. يتميّز القطع الزائد من القطع الناقص والقطع المكافئ أنه يتألف من فرعَيّن متناظرَين بالنسبة إلى المركز وإلى المحور المرافق.

إذا كانت البؤرتان تقعان في النقطتين $F_1(-c,0)$ وَ $F_2(c,0)$ وإذا كان $|PF_1 - PF_2| = 2a$ فإن إحداثيي النقطة $P(x,y)$ يحقّقان العلاقة $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$.
لتبسيط هذه المعادلة، اعزل كل جذر في طرف من طرفيها، وربّع. ثم اعزل الجذر المتبقّي مرّة ثانية وربّع. تحصل في النهاية على المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$



تُشبه هذه المعادلة معادلة القطع الناقص. غير أن $a<c$ لأن $2a$ تقل عن $2c$ لأنها تمثِّل الفرق بين ضلعي المثلث PF_1F_2. من ناحية أخرى، يُمكنك أن تُبيّن التالي: إذا حقَّق إحداثيا نقطة $P(x,y)$ المعادلة السابقة مع $0<a<c$ فإنها تحقّق $|PF_1 - PF_2| = 2a$.
إذا سميّت b الجذر التربيعي الموجب للعدد c^2-a^2، فإن $c^2-a^2=b^2$ وتصبح المعادلة:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$، وهي **الصورة المبسَّطة** لمعادلة القطع الزائد.

إذا قارنت بين المعادلتَيْن المبسَّطتين للقطع الناقص والقطع الزائد تجد أنهما تتشابهان إلا في أمرين: أولاً، تتضمن معادلة القطع الناقص إشارة الزائد + ، بينما تتضمن معادلة القطع الزائد إشارة الناقص. ثانيًا، $c^2 = a^2 - b^2$ في معادلة القطع الناقص، في حين أنها $c^2 = a^2 + b^2$ في معادلة القطع الزائد.

تـذكَّـرْ

تذكر أن a وَ b وَ c ترتبط بالعلاقة $c^2 = a^2 + b^2$ استنادًا إلى مبرهنة فيثاغورس.

تكشف هذه المعادلة أن القطع الزائد متناظر بالنسبة إلى كل من محوَري الإحداثيات، وهما المحور البؤري والمحور المرافق، ومتناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل. يتقاطع القطع الزائد مع المحور x عند نقطتين هما $(-a, 0)$ وَ $(a, 0)$ وهما **رأسا القطع الزائد**. أخيرًا، مماسّا القطع الزائد عند رأسَيْه هما مستقيمان متعامدان مع محوره البؤري.

لكن إذا كان مركز القطع الزائد لا يقع في نقطة الأصل، فإن معادلته تتّخذ الشكل

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ إذا كان المحور البؤري أفقيًّا.

وَ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ إذا كان المحور البؤري عموديًّا.

تذكر أن النقطة (h, k) هي مركز القطع الزائد.

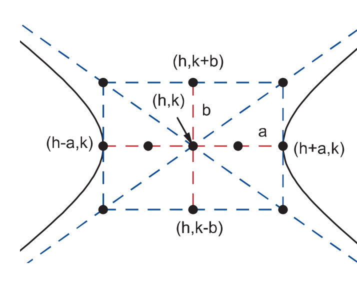
المحاذيان

للقطع الزائد محاذيان هما

$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$ إذا كان المحور البؤري أفقيًّا،

و $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$ إذا كان المحور البؤري عموديًّا.

يساعد المحاذيان على رسم القطع الزائد. كما يساعد على ذلك أيضًا أن تعرف أن المحاذيين يتقاطعان عند مركزه، ويحملان قطرَي المستطيل الذي مركزه في مركز القطع الزائد وبعداه $2a$ وَ $2b$.



معادلة القطع الزائد

الصورة العامة لمعادلة القطع الزائد هي:

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ إذا كان المحور البؤري أفقيًّا

وَ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ إذا كان المحور البؤري عموديًّا.

في هذه المعادلة: (h, k) هو مركز القطع الزائد؛ a هو نصف المحور الحقيقي؛ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ المسافة بين المركز وبؤرة.

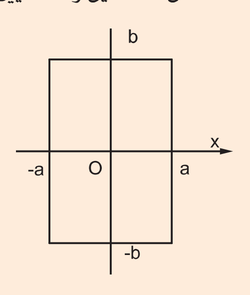
عناصر القطع الزائد الأخرى هي:

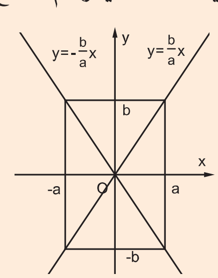
- الرأسان: $(h \pm a, k)$ إذا كان المحور البؤري أفقيًّا وَ $(h, k \pm a)$ إذا كان عموديًّا.
- البؤرتان: $(h \pm c, k)$ إذا كان المحور البؤري أفقيًّا و $(h, k \pm c)$ إذا كان عموديًّا.
- المحاذيان: $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$ إذا كان المحور البؤري أفقيًّا وَ $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$ إذا كان عموديًّا.

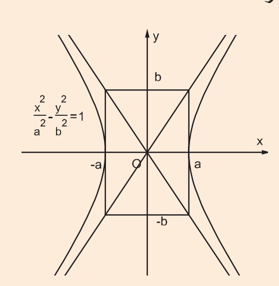
يساعد المستطيل $2a \times 2b$ الذي يقع مركزه في نقطة الأصل، على رسم القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ والقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. لاحظ أن القطع الناقص يقع بكامله داخل المستطيل. أما القطع الزائد فيقع بكامله خارجه. ذلك أن المعادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ تبيّن أن $\frac{x^2}{a^2}\geq 1$ وبالتالي $x \geq a$ أو $x \leq -a$ ، لاحظ أخيرًا أن كلاً من القطعين له مماسّان عند رأسيه، هما ضلعان متقابلان في المستطيل.

كيف ترسم القطع الزائد

1. عيّن النقاط $(\pm a, 0)$ وَ $(0, \pm b)$، وأكمل المستطيل الذي تُحدّدانه.
2. ارسم المحاذيَين عن طريق تمديد قطرَي المستطيل.
3. استعمل المستطيل والمحاذيين لقيادة خطاك في رسم القطع الزائد.







مثـــال 4 استعمال المحاذيين لرسم قطع زائد

ارسم القطع الزائد $4x^2 - y^2 = 16$.

الحل

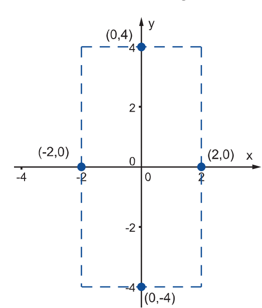
ابدأ بكتابة معادلة القطع الزائد على الصورة العامة.

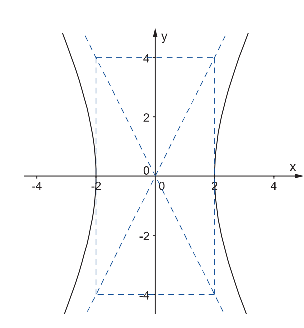
$$4x^2 - y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$$

ينتج من ذلك أن المحور البؤري أفقي وأن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل.

بعدا المستطيل هما $2a = 4$ وَ $2b = 8$.

ارسم الآن المستطيل.





ارسم قطرَي المستطيل ومدّهما لتحصل على محاذيي القطع الزائد.

يُمكنك الآن أن ترسم القطع الزائد بشكل مقبول.



4. ارسم القطع الزائد $y^2 - 4x^2 = 16$.

يمكنك أن تجد، انطلاقًا من المعادلة، عناصر القطع الزائد، وهي: الرأسان والبؤرتان والمحاذيان. ميّز قبل ذلك إن كان المحور البؤريُّ للقطع أفقيًّا أو عموديًّا.

مثال 5 إيجاد عناصر قطع زائد بؤرتاه على المحور x

جِد عناصر القطع الزائد $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

الحل

$a^2=4$ ، $b^2=5$ ، $c^2=a^2+b^2=9$

المسافة بين المركز والبؤرة: $c=3$

البؤرتان: $(\pm c,\ 0)=(\pm 3,\ 0)$ الرأسان: $(\pm a,\ 0)=(\pm 2,\ 0)$

المحاذيان: $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$ المركز: $(0,\ 0)$

نقطة مراقبة 5. جِد عناصر القطع الزائد $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$.

مثال 6 إيجاد عناصر قطع زائد بؤرتاه على المحور y

جِد عناصر القطع الزائد $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$.

الحل

$a^2=4$ ، $b^2=5$ ، $c^2=a^2+b^2=9$

المسافة بين المركز والبؤرة: $c=3$

البؤرتان: $(0,\ \pm c)=(0,\ \pm 3)$ الرأسان: $(0,\ \pm a)=(0,\ \pm 2)$

المحاذيان: $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$ المركز: $(0,\ 0)$

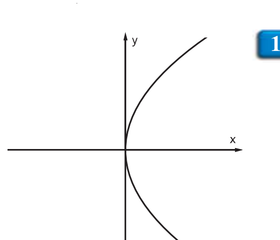
نقطة مراقبة 6. جِد عناصر القطع الزائد $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$.

1-6 التمارين

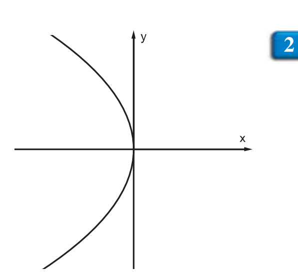
في التمارين من 1 إلى 4، اقرن القطع المكافئ بالمعادلة التي يمثّلها.

$x^2=2y$ ، $x^2=-6y$ ، $y^2=8x$ ، $y^2=-4x$

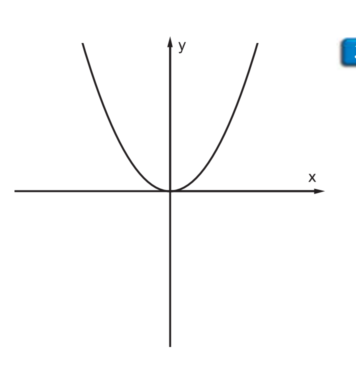
1



2

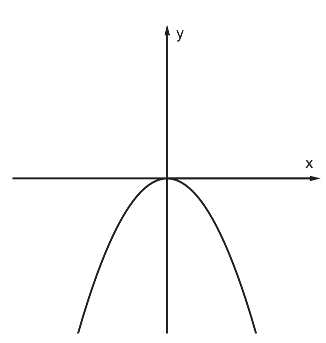


3





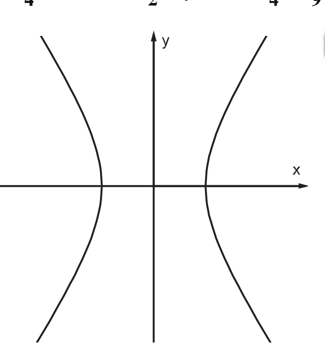
4



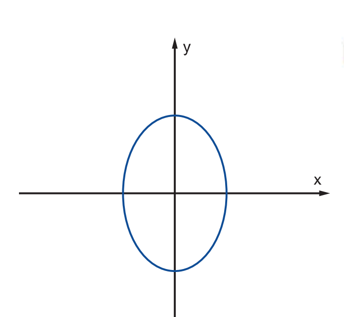
في التمارين من 5 إلى 8، اقرن القطع المخروطي بالمعادلة التي يمثّلها.

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ، $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ، $\frac{y^2}{4}-x^2=1$ ، $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

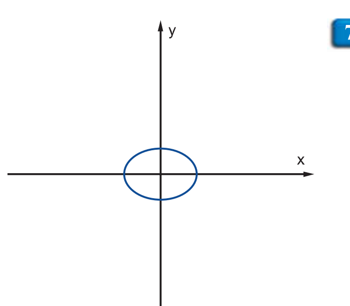
5



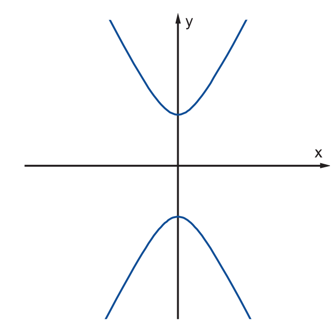
6



7



8



في التمارين من 9 إلى 13، جِد بؤرة القطع المكافئ ورأسه ودليله وارسمه.

9 $y^2=12x$

10 $y^2=-6x$

11 $(x+3)+(y-2)^2=0$

12 $x^2+4x+4y-4=0$

13 $y^2+4y+8x-12=0$

في التمارين من 14 إلى 17، اكتب معادلة القطع المكافئ.

14 الرأس: $(3, 2)$ ؛ البؤرة: $(1, 2)$

15 الرأس: $(0, 4)$ ؛ الدليل: $y=-2$

16 البؤرة: $(2, 2)$ ؛ الدليل: $x=-2$

17 الرأس: $(2, 4)$ ؛ التقاطعان الأفقيان: $(0, 0)$ وَ $(4, 0)$

في التمارين من 18 إلى 21 ، جِد عناصر القطع الناقص ثم ارسمه.

18 $5x^2+7y^2=70$

19 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$

20 $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$

21 $9x^2+25y^2-36x+150y+36=0$

في التمارين من 22 إلى 25، اكتب معادلة القطع الناقص.

22 المركز: $(0, 0)$ ؛ بؤرة: $(2, 0)$ ؛ رأس: $(3, 0)$

23 الرأسان: $(3, 1)$ وَ $(3, 9)$ ؛ المحور الصغير: 6

24 البؤرتان: $(0, \pm 5)$ ؛ المحور الكبير: 14

25 المركز: $(1, 2)$ ؛ المحور البؤري عمودي؛ يمر في النقطتين $(1, 6)$ وَ $(3, 2)$

في التمارين من 26 إلى 29، جِد عناصر القطع الزائد ثم ارسمه.

26 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$

27 $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{1}=1$

28 $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$

29 $x^2-9y^2+2x-54y-81=0$

في التمارين من 30 إلى 33، اكتب معادلة القطع الزائد.

30 الرأسان: $(\pm 1, 0)$ ؛ المحاذيان: $y=\pm 3x$

31 الرأسان: $(2, \pm 3)$ ؛ يمر في النقطة $(0, 5)$

32 المركز: $(0, 0)$ ؛ بؤرة: $(0, 4)$ ؛ رأس: $(0, 2)$

33 الرأسان: $(2, \pm 3)$ ؛ البؤرتان: $(2, \pm 5)$

حول المفاهيم

34 عرِّف كلاً من القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد.

35 اكتب، على الصورة العامة، معادلة القطع زائد الذي يقع رأسه في النقطة (h, k)

36 اكتب، على الصورة العامة، معادلة القطع الناقص الذي يقع مركزه في النقطة (h, k) .

37 اكتب، على الصورة العامة، معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه في النقطة (h, k) .

38 اكتب معادلتي المحاذيين للقطع الزائد الذي يقع مركزه في النقطة (h, k) .

39 اكتب بأسلوبك خاصّية الانعكاس للقطع المكافئ.

40 سُحب القطع المكافئ $y^2=8x$ وحدتين إلى الأسفل ووحدة واحدة إلى اليمين للحصول على القطع المكافئ $(y+2)^2=8(x-1)$.

أ جِد رأس القطع المكافئ الأصلي وبؤرته ودليله.

ب عيّن رأس القطع المكافئ الجديد وبؤرته وارسم دليله.

ج ارسم القطعين المكافئين (الأصل والصورة).

2-6 تصنيف القطوع المخروطية

Classifying Conics

الأهداف

- يُصنّف القطوع المخروطية وفق اختلافها المركزي.
- يُعرّف القطوع المخروطية بالبؤرة والدليل.

المفردات Vocabulary

الاختلاف المركزي Eccentricity

البؤرة Focus

الدليل Directrix

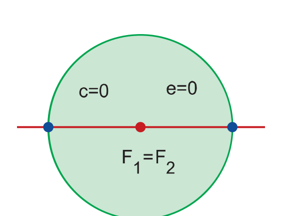
القطوع الناقصة والمدارات

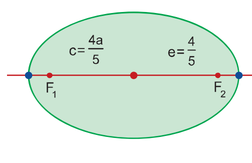
يُقرَنُ كل قطع مخروطي بعدد يُسمّى **الاختلاف المركزي**. تُحدِّد قيمة الاختلاف المركزي إن كان القطع دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا مكافئًا أو قطعًا زائدًا، كما تُحدِّد عناصره في حالتَي القطع الناقص والقطع الزائد. سوف نبدأ بالقطع الناقص. بالرغم من أن المسافة بين مركز القطع الناقص وإحدى بورتَيه، c، لا تظهر في المعادلة

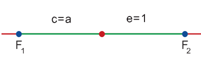
$$(a > b)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

فإنك تجدها باستعمال $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

إذا ثبَّتَّ قيمة a وجعلت قيمة c تتغيّر في الفترة $[0, a]$، فسوف تتغيّر هيئة القطع الناقص كما هو مبيّن في الشكل المقابل. فهو دائرة عندما يكون $c = 0$ $(a = b)$ ويأخذ في الانبطاح مع تزايد قيمة c حتى يُصبح قطعة مستقيمة عندما $c = a$.







مع تزايد قيمة e، يتحوّل القطع الناقص من دائرة إلى قطعة مستقيمة

تُستعمل نسبة c إلى a لوصف الهيئات المختلفة للقطع الناقص. هذه النسبة هي الاختلاف المركزي.

الاختلاف المركزي

الاختلاف المركزي للقطع الناقص $(a > b)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ هو $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

مثال 1 إيجاد رؤوس القطع الناقص

جِد إحداثيات رأسَي قطع ناقص اختلافه المركزي 0.8 وبؤرتاه في $(0, \pm 7)$.

الحل

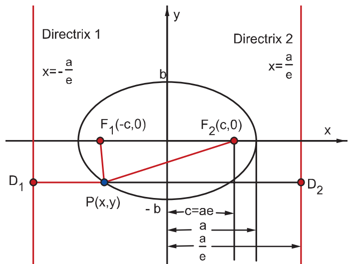
يقع رأسا القطع الناقص عند $(0, \pm a)$. بما أن $e = \frac{c}{a}$ فإن $a = \frac{c}{e} = \frac{7}{0.8} = 8.75$.

يقع رأسا القطع الناقص عند $(0, \pm 8.75)$.

نقطة مراقبة 1. جِد إحداثيات رأسَي قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 وتقع بؤرتاه في $(0, \pm 6.5)$.

للقطع المكافئ بؤرة واحدة و**دليل** واحد في حين أن للقطع الناقص بؤرتان ودليلان. الدليلان هما مستقيمان متعامدان مع المحور البؤري ويقطعانه على مسافة $\pm\frac{a}{e}$ من المركز. تتمتّع كل نقطة P من نقاط القطع المكافئ بالخاصية التالية:

$$PF = 1 \times PD$$



حيث D أقرب نقطة من نقاط الدليل إلى P .

تُصبح العلاقة السابقة، بالنسبة إلى القطع الناقص، $PF_1 = e \times PD_1$ وَ $PF_2 = e \times PD_2$ حيث e الاختلاف المركزي للقطع الناقص، F_1 وَ F_2 بؤرتاه، D_1 وَ D_2 النقطتان على دليلَي القطع الناقص الأقرب إلى P .

في كل معادلة من المعادلتين $PF_1 = e \times PD_1$ وَ $PF_2 = e \times PD_2$ ، ينبغي أن تكون البؤرة والدليل من الجهة نفسها من مركز القطع الناقص. إذا كانت A رأس القطع الناقص وكانت $x = m$ معادلة الدليل، فإن A تُحقق $AF_2 = e \times AD_2$ كما أن m تُحقق العلاقة $(a-c) = e(m-a)$ لأن A تنتمي إلى القطع الناقص. يُمكن تبسيط العلاقة السابقة كما يلي:

وبالتالي $(a-c) = e \times (m-a) = \frac{c}{a}(m-a) = \frac{cm}{a} - c$ أي $a = \frac{cm}{a}$ $m = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{e}$ معادلة الدليل هي $x = m = \frac{a}{e}$.

الاختلاف المركزي للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هو $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

لاحظ أن الاختلاف المركزي لكل من القطع الناقص والقطع الزائد هو نسبة المسافة بين البؤرتين إلى المسافة بين الرأسين، لأن $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a}$.

الاختلاف المركزي = $\frac{\text{المسافة بين البؤرتين}}{\text{المسافة بين الرأسين}}$

المسافة بين بؤرتَي القطع الناقص أصغر من المسافة بين الرأسين، مما يجعل الاختلاف المركزي أصغر من 1، في حين أن المسافة بين بؤرتَي القطع الزائد أكبر من المسافة بين الرأسين مما يجعل الاختلاف المركزي أكبر من 1.

مثـــال 2 إيجاد الاختلاف المركزي

جِد الاختلاف المركزي للقطع الزائد $9x^2 - 16y^2 = 144$.

الحل

ابدأ بكتابة معادلة للقطع الزائد على الصورة المبّسطة.

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

لديك $a = 4$ وَ $b = 3$.

ينتج من ذلك $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ وَ $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

نقطة مراقبة 2. **جِد الاختلاف المركزي للقطع الزائد $16x^2 - 9y^2 = 144$.**

كما في حالة القطع الناقص، كذلك في القطع الزائد يؤدي المستقيمان $x = \pm\frac{a}{e}$ دور دليلَيه، كما أن $PF_1 = e \times PD_1$ وَ $PF_2 = e \times PD_2$ ، حيث P نقطة من نقاط القطع الزائد، F_1 وَ F_2 بؤرتاه، في حين أن D_1 وَ D_2 النقطتان على الدليلين الأقرب إلى النقطة P .

وكما في حالة القطع الناقص، يُمكننا تبيان أن معادلتي الدليلين هما : $x = \pm\frac{a}{e}$.

تعريف موَّحد للقطوع المخروطية

لإكمال الصورة حول القطوع المخروطية، نعرّف الاختلاف المركزي للقطع المكافئ بـ $e = 1$.

الاختلاف المركزي للقطع المكافئ

الاختلاف المركزي للقطع المكافئ هو $e = 1$.

إذا راجعت العلاقات التي تحقِّقها القطوع المخروطية الثلاثة، تستطيع إعطاء تعريف موحد لها باستعمال بؤرة ودليلها والاختلاف المركزي.

التعريف الموَّحد للقطوع المخروطية

إذا كانت F نقطة في المستوي وَ d مستقيمًا من مستقيماته وَ e عددًا حقيقيًّا غير سالب، فإن القطع المخروطي ذا البؤرة F والدليل d والاختلاف المركزي e هو مجموعة النقاط P في المستوي التي تُحقِّق: $PF = e \times PD$ أو $\frac{PF}{PD} = e$

يكون القطع المخروطي

- قطعًا مكافئًا إذا كان $e = 1$.
- قطعًا ناقصًا إذا كان $e < 1$.
- قطعًا زائدًا إذا كان $e > 1$.

لا تبدو المعادلة $\frac{PF}{PD} = e$ سهلة الاستعمال. فهي لا تتضمن إحداثيات. وإذا حاولت أن تترجمها باستعمال الإحداثيات لوجدت نتائج مختلفة، من حيث شكلها، وفقًا لقيمة e . إلا أنها عملية سهلة جدًا في نظام إحداثيات آخر هو نظام الإحداثيات القطبية لدرجة أن علماء الفلك والفضاء يستعملونها منذ أكثر من 300 عام.

إذا عرفت البؤرة والدليل المرافق لها في قطع زائد مركزه في نقطة الأصل وبؤرته على المحور x ، يُمكنك أن تستخلص قيمة الاختلاف المركزي e، وبالتالي استخلاص معادلة إحداثية له انطلاقًا من المعادلة $PF = e \times PD$، كما سنرى في المثال التالي. يُمكنك فعل الشيء نفسه لقطع ناقص مركزه نقطة الأصل وتقع بؤرته على المحور x .

مثـــال 3 استعمال البؤرة والدليل

جِد معادلة إحداثية للقطع الزائد الذي يقع مركزه في نقطة الأصل وله بؤرة في النقطة $(3, 0)$ وَدليله المستقيم $x = 1$.

الحـل

بما أن مركز القطع الزائد يقع في نقطة الأصل والبؤرة في النقطة $(3, 0)$ فإن $c = 3$.

من ناحية أخرى، معادلة الدليل هي $x = \frac{a}{e} = 1$ مما يُنتج $a = e$. وأخيرًا $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}$

وبالتالي $e^2 = 3$. تستنتج من كل ذلك أن $e = \sqrt{3}$.

من ناحية أخرى، يُمكنك ترجمة العلاقة $PF = e \times PD$ إحداثيًّا بما يلي:

$$PF = e \times PD$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{3}|x-1|$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$2x^2 - y^2 = 6$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$$


نقطة مراقبة

3. جِد معادلة إحداثية للقطع الناقص الذي يقع مركزه في نقطة الأصل وله بؤرة في النقطة $(3, 0)$ ودليله $x = 4$.

مثـــال 4 إيجاد معادلة قطع ناقص بمعرفة اختلافه المركزي وبؤرة ودليلها

جِد معادلة القطع الناقص الذي اختلافه المركزي 0.8 وإحدى بؤرتيه النقطة $(5, 1)$ ودليلها المستقيم $x = 6.25$.

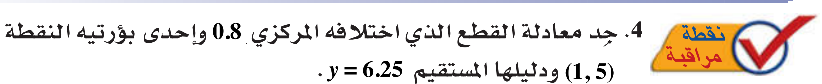
الحل

ابدأ بإيجاد c باستعمال معادلة الدليل $x = \frac{a}{e} = 6.25$، تحصل على $a = 6.25e = 6.25 \times 0.8 = 5$.

وبالتالي $c = a \times e = 5 \times 0.8 = 4$ وَ $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$. يبقى تحديد مركز القطع الناقص. الإحداثي للبؤرة هو $x = h + c$ مما يُعطي $h = x - c = 5 - 4 = 1$. من ناحية أخرى، الإحداثي y للمركز هو الإحداثي y للبؤرة أي 1. إذا $k = 1$. يُمكنك الآن أن تكتب معادلة القطع الناقص $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$.

نقطة مراقبة

4. جِد معادلة القطع الذي اختلافه المركزي 0.8 وإحدى بؤرتيه النقطة $(1, 5)$ ودليلها المستقيم $y = 6.25$.



2–6 التمارين

في التمارين من 1 إلى 4، جِد الاختلاف المركزي والبؤرتين والدليلين لكل قطع ناقص.

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$
2. $2x^2 + y^2 = 2$
3. $3x^2 + 2y^2 = 6$
4. $6x^2 + 9y^2 = 54$

في التمرينين 5 وَ 6، جِد الاختلاف المركزي ثم المعادلة المختصرة للقطع الناقص الذي يقع مركزه في نقطة الأصل بمعرفة بؤرة ودليل.

5. البؤرة: $(\sqrt{5}, 0)$ ؛ الدليل: $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$.
6. البؤرة: $(-4, 0)$ ؛ الدليل: $x = -16$.

7. ارسم قطعًا ناقصًا اختلافه المركزي $\frac{4}{5}$. اشرح طريقة عملك.

8. رؤوس قطع ناقص هي $(1, 1)$ ، $(3, 4)$ ، $(1, 7)$ ، $(-1, 4)$. ارسم القطع الناقص وجِد معادلته العامة. جِد بؤرتيه واختلافه المركزي ودليليه.

9. جِد معادلة لقطع ناقص اختلافه المركزي $\frac{2}{3}$ وإحدى بؤرتيه النقطة $(4, 0)$ ودليلها $x = 9$.

في التمارين من 10 إلى 13، جِد الاختلاف المركزي للقطع الزائد وجِد بؤرتيه ودليليه.

10. $9x^2 - 16y^2 = 144$
11. $y^2 - x^2 = 8$
12. $8x^2 - 2y^2 = 16$
13. $8y^2 - 2x^2 = 16$

في التمرينين 14 وَ 15، جِد المعادلة المبسَّطة للقطع الزائد بمعرفة الاختلاف المركزي والرأسين أو البؤرتين.

14. الاختلاف المركزي 3؛ الرأسان العموديان $(0, \pm 1)$.

15. الاختلاف المركزي 3؛ البؤرتان $(\pm 3, 0)$.

16. جِد قيم a وَ b وَ c بحيث يمر القطع الناقص $4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ في النقطة $(-1, 2)$ ويكون المحور x مماسًّا له عند نقطة الأصل. ما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص؟

17. جِد معادلة للقطع الزائد الذي يُشكِّل مجموعة نقاط المستوى التي يساوي مطلق الفرق بين بعديها عن النقطتين $(2, 2)$ وَ $(10, 2)$ قيمة ثابتة 6.

اختبار جزئي

1-6 القطوع المخروطية

1 جد بؤرة كل قطع مكافئ، وحدِّد رأسه ودليله، ثم ارسمه في المستوي الإحداثي.

أ $y^2-4x=0$ ب $x=2(1-y^2)$ ج $x^2-2x+2y+3=0$

2 جد مركز كل قطع ناقص، وحدِّد بؤرتَيه واختلافه المركزي، ثم ارسمه في المستوي الإحداثي.

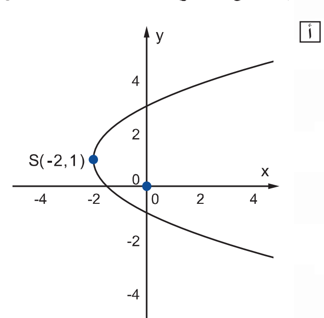
أ $x^2+4y^2=1$ ب $4x^2+y^2-8x-12=0$

3 جد مركز كل قطع زائد، وحدِّد بؤرتيه والمحور الكبير، ثم ارسمه في المستوي الإحداثي.

أ $x^2-y^2=4$ ب $4(y-1)^2-x^2=1$

4 اكتب، على الصورة العامّة، معادلة لكل قطع مخروطي .

أ



ب

y
x
F(1,1+√3)
I(1,1)
4
2
0
-2
-2
0
2
4

5 اكتب، على الصورة العامة، معادلة لقطع ناقص مركزه $I(3,1)$ وأحد رؤوسه $A(6,1)$ وأحد دليليه المستقيم $x=7$.

6 اكتب، على الصورة العامة، معادلة لقطع زائد مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه $A(3,0)$ واختلافه المركزي $\frac{5}{3}$.

2-6 تصنيف القطوع المخروطية

7 M نقطة تتحرّك في المستوي الإحداثي بحيث تحقّق دائمًا العلاقة $|MA-MB|=1$ حيث $A(0,-1)$ وَ $B(0,3)$. حدد نوع المنحنى حيث تتحرك هذه النقطة، واكتب معادلته على الصورة العامة.

8 تتحرك نقطة M في المستوي الإحداثي بحيث تساوي المسافة بينها وبين نقطة الأصل ثلثي المسافة بينها وبين المستقيم $x=\frac{5}{2}$. حدِّد نوع المنحنى حيث تتحرّك، واكتب معادلته على الصورة العامّة.

3-6 المعادلات التربيعية بمتغيّرين (للإطلاع)
Quadratic Equations in 2 Variables

الأهداف

- يتخلّص من الحد التقاطعي بإدارة محوري الإحداثيات.
- يحدّد مختلف التمثيلات البيانية لمعادلة تربيعية بمتغيّرين.
- يستعمل اختبار المميّز لتصنيف المعادلات التربيعيّة بمتغيّرين.

المفردات Vocabulary

المنحنيات التربيعية	Quadratic Curves
المميز	Discriminant

المنحنيات التربيعيّة

سوف تتعلّم في هذا الدرس موضوعًا من أكثر الموضوعات إثارة للدهشة في الهندسة الإحداثية. إنّه التمثيل البياني للمعادلة التربيعيّة بمتغيّرين والتي تُكتب على الصورة

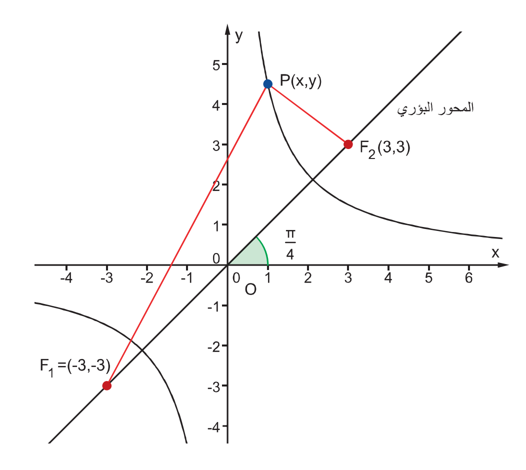
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

حيث A وَ B وَ C و D وَ E وَ F أعداد حقيقية لا تساوي جميعها 0. غالبًا ما يكون هذا المنحني قطعًا مخروطيًّا، لكنه قد يكون، في حالات التردّي، نقطة أو مستقيمين متوازيين أو حتى المجموعة الخالية. من المتعارف عليه تسمية المنحنيات التي تمثّل المعادلات التربيعيّة بمتغيّرين **المنحنيات التربيعيّة**.

لا شك في أنك تساءلت عن الحد Bxy الذي لم تصادفه قبلاً في معادلات القطوع المخروطيّة التي رأيتها. يُسمّى هذا الحد **الحد التقاطعي**. يعود غياب الحد التقاطعي إلى أن محاور القطوع المخروطيّة التي رأيتها كانت دائمًا موازية لمحوري الإحداثيات. لكي ترى ما يحدث عندما لا تكون هذه المحاور موازية لمحورَي الإحداثيات، سوف نكتب معادلة القطع الزائد في الحالة $a=3$ والبؤرتان $F_1(-3,-3)$ وَ $F_2(3,3)$.

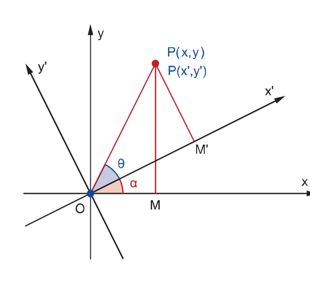
القطع الزائد المذكور هو مجموعة النقاط $P(x,y)$ التي تحقّق $|PF_1-PF_2|=2a=2(3)=6$ تُترجم هذه العلاقة إحداثيًّا إلى $\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\pm 6$

إذا عزلت أحد الجذرين في طرف، وقمت بالتربيع، ثم عزلت الجذر الباقي في طرف وقمت بالتربيع، من جديد تصل بعد التبسيط إلى $2xy=9$.



محاذيا القطع الزائد وفقًا للمعادلة الجديدة هما محورا الإحداثيات، بينما يكوّن المحور البؤري مع الاتجاه الموجب للمحور x زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ راديان.

إدارة محورَي الإحداثيات للتخلُّص من الحد Bxy



للتخلُّص من الحد التقاطعي، يقوم العاملون في حقل الرياضيات بإدارة محورَي الإحداثيات حول نقطة الأصل للحصول على مستوٍ إحداثي جديد لا تتضمّن معادلة المنحنى فيه أي حد تقاطعي.
بالاستناد إلى الشكل المقابل، يُمكنك أن تكتب:

$$x = OM = OP\cos(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\cos\alpha - OP\sin\theta\sin\alpha$$
$$y = PM = OP\sin(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\sin\alpha + OP\sin\theta\cos\alpha$$

وبما أن $OP\cos\theta = OM' = x'$ وَ $OP\sin\theta = M'P = y'$ فإن:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

يُمكن كتابة العلاقة السابقة على الصورة المصفوفية التالية، كما تعلّمت ذلك في الصف الحادي عشر.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

مثـــال 1 التخلّص من الحد التقاطعي

جد معادلة القطع الزائد $2xy = 9$ في المستوي الإحداثي الناتج عن دوران محورَي الإحداثيات حول نقطة الأصل بزاوية $\frac{\pi}{4}$ راديان.

الحل

لديك $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ مما يُعطيك $x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$ و $y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$. عوّض عن x وَ y في المعادلة $2xy = 9$، تحصل على:

$$2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) = 9$$

أو $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{9} = 1$ التي تشكِّل معادلة القطع الزائد في المستوي الإحداثي الجديد.



1. جد معادلة القطع الزائد $xy = 1$ في المستوي الإحداثي الناتج عن إدارة محورَي الإحداثيات حول نقطة الأصل بزاوية $\frac{\pi}{4}$ راديان.

إذا عدنا إلى المعادلة التربيعيّة في متغيّرين وعوّضنا عن x وَ y بقيمتيْهما بدلالة α وَ x' وَ y' نحصل على صيغة المعادلة في المستوي الإحداثي الجديد:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

ترتبط المعاملات الجديدة والمعاملات القديمة بالعلاقات التالية:

$$A' = A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha$$
$$B' = B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha$$
$$C' = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$
$$D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha$$
$$E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha$$
$$F' = F$$

للتخلّص من الحد $B'x'y'$ ، يكفي اختيار α بحيث تكون $B'=0$. مما يُعطينا:

تحديد زاوية الدوران α

- إذا كان $A=C$ ، اختر $\alpha=\frac{\pi}{4}$ مما يُعطي $B'=B\cos 2\alpha=B\cos\frac{\pi}{2}=0$
- إذا كان $A\neq C$ ، اختر α بحيث يكون $\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}$

مثـــال 2 التخلُّص من الحد التقاطعي

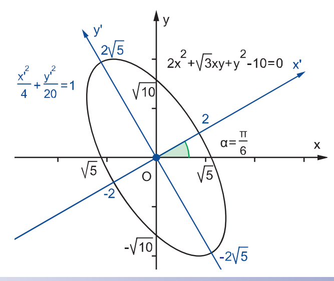
جد زاوية الدوران α بحيث لا تتضمّن معادلة المنحنى $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2-10=0$ في المستوى الإحداثي الجديد حدًّا تقاطعيًّا. جِد معادلة المنحنى في المستوى الإحداثي الجديد.

الحـل

لديك $A=2$ ، $B=\sqrt{3}$ ، $C=1$. بالتعويض، تحصل على $\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}=\frac{\sqrt{3}}{2-1}=\sqrt{3}$. ينتج من ذلك $2\alpha=\frac{\pi}{3}$ وَ $\alpha=\frac{\pi}{6}$. معاملات معادلة المنحنى في المستوى الإحداثي الجديد هي:

$A'=\frac{5}{2}$ ، $B'=0$ ، $C'=\frac{1}{2}$ ، $D'=E'=0$ ، $F'=-10$ مما يُعطي $\frac{5}{2}(x')^2+\frac{1}{2}(y')^2-10=0$

أو $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{20}=1$. هذا المنحنى هو قطع ناقص تقع بؤرتاه على المحور y' .





2. جِد زاوية الدوران α بحيث لا تتضمّن معادلة المنحنى $xy-x-y+1=0$ في المستوي الإحداثي الجديد حدًّا تقاطعيًا. جِد معادلة المنحنى في المستوي الإحداثي الجديد.

التمثيلات البيانيّة الممكنة لمعادلة تربيعيّة بمتغيّرين

بما أن بالإمكان دائمًا التخلُّص من الحد التقاطعي، فإن بوسعنا الافتراض أن $B=0$ ، وأن المعادلة التربيعيّة بمتغيّرين تُكتب $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

يُمكن لهذه المعادلة أن تتمثّل بيانيًّا بـ:

1. دائرة إذا كان $A=C\neq 0$ (لها حالتا تردٍّ: نقطة والمجموعة الخالية).
2. قطع مكافئ إذا كانت تربيعية بأحد المتغيّرين وخطّية بالمتغيّر الآخر.
3. قطع ناقص إذا كان A وَ C من الإشارة نفسها (له حالتا تردٍّ: نقطة والمجموعة الخالية).
4. قطع زائد إذا كان A وَ C من إشارتين متعاكستين (له حالة تردٍّ: مستقيمان متقاطعان).
5. مستقيم إذا كان $A=C=0$ ، وواحد على الأقل من المعاملَين D وَ E مختلفًا عن 0.

.6 مستقيم أو مستقيمين إذا كان ممكنًا تحليل الطرف الأيسر للمعادلة على صورة ناتج ضرب عاملين خطّيين.

يُبيّن الجدول أدناه بعض الأمثلة.

	A	B	C	D	E	F	المعادلة	ملاحظات
دائرة	1	0	1	0	0	-4	$x^2+y^2=4$	$F<0$ ؛ $A=C$
قطع مكافئ	0	0	1	-9	0	0	$y^2=9x$	تربيعي في y، خطّي في x
قطع ناقص	4	0	9	0	0	-36	$4x^2+9y^2=36$	$F<0$ ، $A\neq C$ ، $AC>0$
مستقيم واحد	1	0	0	0	0	0	$x^2=0$	المحور y
مستقيمان متقاطعان	0	1	0	1	-1	-1	$xy+x-y-1=0$	تحليل إلى $(x-1)(y+1)=0$ $y=-1$ ، $x=1$
مستقيمان متوازيان	1	0	0	-3	0	2	$x^2-3x+2=0$	تحليل إلى $(x-1)(x-2)=0$ $x=2$ ، $x=1$
نقطة	1	0	1	0	0	0	$x^2+y^2=0$	نقطة الأصل
مجموعة خالية	1	0	0	0	0	1	$x^2=-1$	المجموعة الخالية

اختبار المميِّز Discriminant Test

مع مراعاة أن بعض القطوع المخروطية قد تكون في حالة تردٍّ، فإن المنحني الذي يُمثِّل المعادلة $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ، هو:

- قطع مكافئ إذا كان المميِّز يساوي 0.
- قطع ناقص إذا كان المميِّز سالبًا.
- قطع زائد إذا كان المميِّز موجبًا.

المميِّز هو B^2-4AC

مثـــال 3 اختبار المميِّز

حدِّد طبيعة المنحني الذي يُمثِّل كل معادلة.

أ $3x^2-6xy+3y^2+2x-7=0$ ب $x^2-xy+y^2-1=0$

ج $xy-y^2-5y+1=0$

الحل

أ $B^2-4AC=(-6)^2-4(3)(3)=36-36=0$ ؛ قطع مكافئ.

ب $B^2-4AC=(1)^2-4(1)(1)=1-4=-3<0$ ؛ قطع ناقص.

ج $B^2-4AC=(1)^2-4(0)(-1)=1>0$ ؛ قطع زائد.

نقطة مراقبة

3. حدّد طبيعة المنحني الذي يُمثّل كل معادلة.

أ) $2x^2-4xy+2y^2+2x-7=0$

ب) $2x^2+xy+y^2-5=0$

ج) $x^2-xy-y^2-5y+1=0$

3-6 التمارين

في التمارين من 1 إلى 8، استعمل اختبار المميّز لتحديد نوع المنحني الذي يُمثّل المعادلة.

1) $x^2-3xy+y^2-x=0$

2) $3x^2-7xy+\sqrt{17}y^2=1$

3) $x^2+2xy+y^2-y+2=0$

4) $x^2+4xy+4y^2-3x=6$

5) $xy+y^2-3x=5$

6) $3x^2-5xy+2y^2-7x-14y=-1$

7) $x^2-3xy+3y^2+6y=7$

8) $6x^2+3xy+2y^2+17y+2=0$

9) **اكتب** هل بوسعك أن تقول أي شيء عن الرسم البياني الذي يُمثّل $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ إذا كان $AC<0$ ؟ برِّر جوابك.

10) **اكتب** هل يوجد قطع مخروطي غير مترَدٍّ $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ يتمتّع بالخواص التالية:

أ) متناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل.

ب) يمرّ في النقطة $(1, 0)$. برِّر جوابك.

11) أ) ما نوع القطع المخروطي $xy+2x-y=0$ ؟

ب) استعمل المعادلة لتكتب قيمة y بدلالة x. مثِّل المعادلة التي حصلت عليها باعتبار y دالة نسبية بدلالة x.

ج) جِد إحداثيات نقطتَي القطع المخروطي حيث المماسّ متعامد مع المستقيم $y=-2x$.

12) **إشارة AC** أثبت صحة كل مقولة عن المنحني $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ أو أعطِ مثالاً مضادًّا يُثبت خطأها:

أ) إذا كان $AC>0$ فإن المنحني قطع ناقص.

ب) إذا كان $AC=0$ فإن المنحني قطع مكافئ.

ج) إذا كان $AC<0$ فإن المنحني قطع زائد.

التحدي

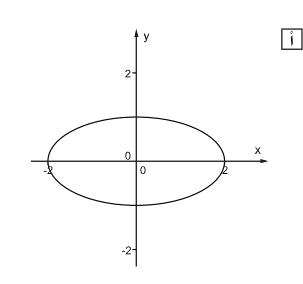
13) **مساحة القطع الناقص** تعرف التالي: إذا كان $B^2-4AC<0$ فإن الرسم البياني الذي يُمثّل المعادلة $Ax^2+Bxy+Cy^2=1$ هو قطع ناقص، وأن مساحة القطع الناقص الذي محوره الكبير $2a$ ومحوره الصغير $2b$ هي πab . بيّن أن مساحة القطع الناقص تساوي $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC-B^2}}$.

الفصل 6

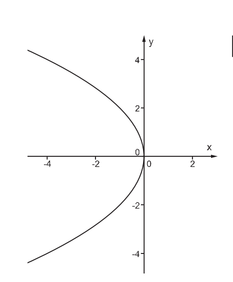
مراجعة الفصل

في التمارين من 1 إلى 6، حدّد الرسم البياني لكل معادلة.

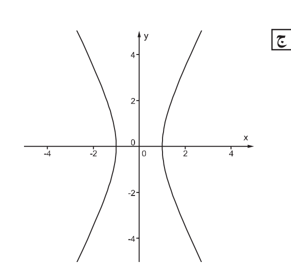
أ



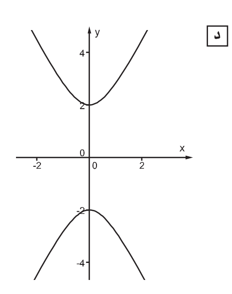
ب



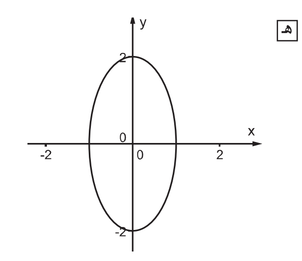
ج



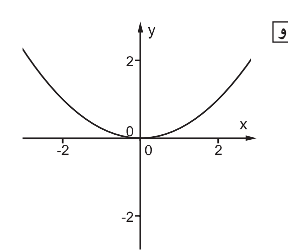
د



هـ



و



1 $4x^2+y^2=4$ **2** $4x^2-y^2=4$ **3** $y^2=-4x$

4 $y^2-4x^2=4$ **5** $x^2+4y^2=4$ **6** $x^2=4y$

في التمارين من 7 إلى 10، حلّل المعادلة وارسم بيانها.

7 $16x^2+16y^2-16x+24y-3=0$ **8** $3x^2-2y^2+24x+12y+24=0$

9 $3x^2+2y^2-12x+12y+29=0$ **10** $y^2-12y-8x+20=0$

في التمرينين 11 وَ 12، جِد معادلة القطع المكافئ.

11 الرأس: $(0, 2)$ ؛ الدليل: $x=-3$

12 الرأس: $(4, 2)$ ؛ البؤرة: $(4, 0)$

في التمرينين 13 وَ 14، جِد معادلة القطع الناقص.

13 الرأسان: $(-3, 0)$ وَ $(7, 0)$
البؤرتان: $(0, 0)$ وَ $(4, 0)$

14 المركز: $(0, 0)$
يمر في النقطتين: $(1, 2)$ وَ $(2, 0)$

في التمرينين 15 16، جِد معادلة القطع الزائد.

15 الرأسان: $(-4, 0)$ وَ $(4, 0)$
البؤرتان: $(-6, 0)$ وَ $(6, 0)$

16 البؤرة: $(0, -8)$ ، $(0, 8)$
المحاذيان: $y=-4x$ وَ $y=4x$

17 جِد معادلة مستقيم مماسّ للقطع المكافئ $y=x^2-2x+2$ ومتعامد مع المستقيم $y=x-2$.

18 جِد معادلة مستقيم مماس للقطع المكافئ $3x^2+y=x-6$ ومتعامد مع المستقيم $2x+y=5$.

19 **صحون لاقطة** يتّخذ مقطع صحن لاقط كبير شكل قطع مكافئ معادلته $y=\frac{x^2}{200}$ حيث $-100\le x\le 100$. وضع المصمِّم جهاز الالتقاط في بؤرة القطع المكافئ. ما إحداثيّا هذه البؤرة؟

20 جِد الاختلاف المركزي لكل قطع من القطوع المخروطية وحدّد نوعه.

أ $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$

ب $4x^2-y^2-4x-3=0$

ج $25x^2-10x-200y-199=0$

د $9x^2+9y^2-36x+6y+34=0$

في التمارين من 21 إلى 24، جِد معادلة القطع المخروطي على الصورة العامة.

21 الاختلاف المركزي: 0.7 ؛ البؤرتان: $(0, \pm 2)$

22 الرأسان: $(\pm 5, 0)$ ؛ الاختلاف المركزي 1.5

23 قطع مكافئ؛ البؤرة: $(1, 1)$ ؛ الرأس: $(0, 1)$

24 قطع ناقص ؛ بؤرة: $(-3, 0)$ ؛ دليل البؤرة: $x=-9$ ؛ الاختلاف المركزي: $\frac{1}{2}$.

في التمارين من 25 إلى 28، حدّد نوع القطع المخروطي وجِد عناصره.

25 $16x^2+25y^2+96x-256=0$

26 $16x^2-25y^2+96x-256=0$

27 $4x^2+y^2-16x-20=0$

28 $x^2-3y^2+8x+12y+16=0$

في التمارين من 29 إلى 34، استعمل المميّز لتحديد نوع بيان المعادلة.

29 $3x^2-18xy+27y^2-5x+7y+4=0$

30 $2x^2-\sqrt{15}xy+2y^2+x+y=0$

31 $2x^2+4xy-y^2-2x+3y-6=0$

32 $x^2+y^2+3x-2y-10=0$

33 $xy+y^2-3x-5=0$

34 $3x^2+12xy+12y^2+435x-9y+72=0$

الفصل 6

تحضيـــر للاختبـــار

1 أي مما يلي معادلة الرسم المقابل؟



أ $9x^2-4y^2=36$ ب $4x^2+9y^2=36$

ج $9y^2-4x^2=36$ د $9x^2+4y^2=36$

2 أي مما يلي تقاطعات بيان المعادلة $4x^2+25y^2=100$ مع المحور x؟

أ $(2, 0)$ وَ $(-2, 0)$ ب $(4, 0)$ وَ $(-4, 0)$

ج $(5, 0)$ وَ $(-5, 0)$ د $(10, 0)$ وَ $(-10, 0)$

3 أي مما يلي معادلة الرسم المقابل؟



أ $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{64}=1$ ب $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{576}=1$

ج $\frac{(x-1)^2}{20}+\frac{(y-1)^2}{150}=1$ د $\frac{x^2}{175}+\frac{y^2}{225}=1$

4 أي من القطوع الزائدة التالية يملك أكبر مسافة بين البؤرتين؟

أ $\frac{(x-6)^2}{36}-\frac{(y+2)^2}{81}=1$ ب $\frac{(x+22)^2}{45}-\frac{(y-36)^2}{125}=1$

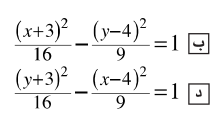
ج $\frac{(y+115)^2}{49}-\frac{(x-225)^2}{100}=1$ د $\frac{(y-59)^2}{90}-\frac{(x+76)^2}{95}=1$

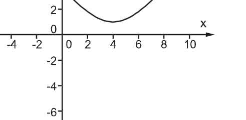
5 أي مما يلي محاذٍ للقطع الزائد $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$؟

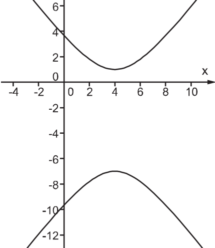
أ $y=-\frac{2}{3}x$ ب $y=\frac{3}{2}x$

ج $y=-\frac{9}{4}x$ د $y=\frac{9}{4}x$

6 أي مما يلي معادلة الرسم المقابل؟







أ $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+4)^2}{9}=1$ ب $\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-4)^2}{9}=1$

ج $\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x+4)^2}{9}=1$ د $\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x-4)^2}{9}=1$

7 ما طول المحور الصغير في القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{121}=1$؟

أ 7 ب 11 ج 14 د 22

8 أي من القطوع المكافئة التالية ينفتح إلى اليسار؟

أ $16y-4x^2=12$ ب $16y+4x^2=12$

ج $16x-4y^2=12$ د $16x+4y^2=12$

9 أي مما يلي محور التناظر للقطع المكافئ $x-4=\frac{1}{8}(y+2)^2$ ؟

أ $x=0$ ب $y=-2$ ج $x=4$ د $y=8$

10 أي من القطوع المكافئة التالية دليله $y=4$ ؟

أ $y+3=\frac{1}{4}(x-1)^2$ ب $y-5=\frac{1}{4}(x+2)^2$

ج $x-5=\frac{1}{4}(y+4)^2$ د $x+3=\frac{1}{4}(y-2)^2$

11 مماس القطع المكافئ $y=ax^2$ عند $x=p$، يقطع المحور x عند:

أ $x=\frac{p}{2}$ ب $x=\frac{p^2}{2}$ ج $x=\frac{ap}{2}$ د $x=\frac{ap^2}{2}$

12 ميل المماس لمنحنٍ عند النقطة (x, y) يساوي $\frac{x}{y}$ أيًّا تكن هذه النقطة على المنحني. ما نوع هذا المنحني؟

أ دائرة ب قطع مكافئ ج قطع ناقص د قطع زائد

13 أي مما يلي بؤرة القطع المكافئ $y^2+4y-8x+36=0$؟

أ $(-2, 6)$ ب $(6, -2)$ ج $(2, -2)$ د $(4, -2)$

14 ما نوع المنحني الذي معادلته: $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$ ؟

أ دائرة ب قطع مكافئ ج قطع ناقص د قطع زائد

الفصل

7

الأعداد المركَّبة والهندسة

Complex Numbers And Geometry

الفصل السابع

الدرسان

الأشكال التوالدية

الأشكال التوالدية هي أشكال تتوالد بالتواتر انطلاقًا من نقطة معيّنة أو شكل معيّن. تُستعمل الأعداد المركّبة لإنشاء أشكال توالدية مثل الشكل الذي تُبيّنه الصورة.

هل أنت مستعد؟

المُفْردات

1 اربط كل عبارة في العمود الأيمن بتفسيرها في العمود الأيسر.

1. العدد المركَّب	أ عدد يُكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a وَ b عددان صحيحان و $b \neq 0$.
2. السحب	ب عدد صورته $a+ib$ حيث a وَ b عددان حقيقيان وَ $i^2=-1$.
3. الانعكاس حول مستقيم	ج تحويل هندسي يسحب جميع نقاط المستوي المسافة نفسها في الاتِّجاه نفسه.
4. العدد النسبيّ	د المسافة بين نقطة على محور الأعداد ونقطة الأصل.
	هـ تحويل هندسي يُحوِّل كل نقطة A إلى نقطة A' بحيث يكون المستقيم محور $\overline{AA'}$.

التحويلات الهندسية

في التمارين من 2 إلى 9، جِد إحداثيي صورة النقطة $A(1, 1)$ بالتحويل المعيّن.

2 انعكاس حول المحور x.

3 انعكاس حول المحور y.

4 انعكاس حول المستقيم $y = x$.

5 سحب متَّجهه $\vec{u}\langle 2, -3\rangle$.

6 تناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته $\frac{1}{2}$.

7 دوران حول نقطة الأصل بزاوية 135°.

8 دوران حول نقطة الأصل بزاوية -90°.

9 انعكاس حول المستقيم $x = 2$ متبوع بدوران حول نقطة الأصل زاويته 90° .

المعادلات التربيعية

في التمارين من 10 إلى 13 ، حدّد نوع جذور المعادلة التربيعية وعددها.

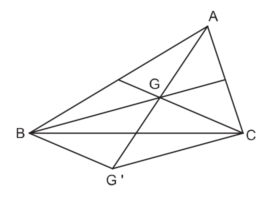
10 $2x^2+5x-9=0$

11 $x^2+x+1=0$

12 $-3x^2+5x-11=0$

13 $2x^2+8x+8=0$

المتَّجهات



14 في الشكل المقابل، G نقطة تقاطع وسيطات المثلث ABC، وَ G' صورة G بالانعكاس حول منتصف $\overline{BC}$. جِد $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

1–7 الصور المختلفة للعدد المركَّب

Various Forms of a Complex Number

الأهداف

- يجد مطلق عدد مركَّب وزاويته القطبية.
- يكتب عددًا مركَّبًا على الصور الجبرية والمثلثية والقطبية.

المفردات Vocabulary

المطلق	Absolute Value
الزاوية القطبية	Argument
الصورة الجبرية	Algebraic Form
الصورة المثلثية	Trigonometric Form
الصورة القطبية	Polar Form

تعلّمت في الصف الحادي عشر أن حل المعادلات التربيعية ذوات المميّز السالب يتطلب إدخال نوع جديد من الأعداد هي **الأعداد المركَّبة**. وتعلمت أيضًا أن كل عدد مركَّب يُكتب على الصورة $z = x + i\,y$ ، بطريقة وحيدة، حيث x وَ y عددان حقيقيان، وَ i العدد التخيُّلي الذي يُحقّق $i^2 = -1$.

ينتج مما سبق أن كل عدد مركَّب $z = x + i\,y$ يُحدِّد زوجًا مرتَّبًا $(x\,,\,y)$ مؤلَّفًا من عددين حقيقيين، ويعيّن بالتالي نقطة في المستوي الإحداثي هي النقطة$M\,(x\,,\,y)$. تُسمّى هذه النقطة **نقطة** العدد المركَّب z وتُكتب M_z . من ناحية أخرى، تُحدِّد كل نقطة $A(a\,,\,b)$ في المستوي الإحداثي زوجًا مرتَّبًا $(a\,,\,b)$ مؤلَّفًا من عددَين حقيقيَّين (إحداثيي النقطة) وتُحدِّد بالتالي عددًا مركَّبًا $u = a + ib$. يُسمّى هذا العدد المركَّب **عدد** النقطة A، ويُكتب على الصورة z_A .

الصورة الجبرية

الصورة الجبرية لكتابة عدد مركَّب z هي الكتابة $z = x + i\,y$ حيث x وَ y عددان حقيقيان و i العدد التخيّلي الذي يُحقّق $i^2 = -1$. تعلَّمت في الصف الحادي عشر أن العدد المركَّب z يُكتب على هذه الصورة بطريقة وحيدة. يُسمّى العدد الحقيقي x **الجزء الحقيقي** لِـ z ويُكتب $R(z)$. كما يُسمّى العدد الحقيقي y **الجزء التخيّلي** لِـ z ويُكتب $I(z)$.

يُرافق كل عدد مركَّب $z = a + ib$ العدد المركَّب $\bar{z} = a - ib$، ويُسمّى **العدد المرافق** للعدد z. لاحظ أن للعددين z و $\bar{z}$ الجزء الحقيقي نفسه أي $R(\bar{z}) = R(z)$ ، وأن جزءَيهما التخيليين متعاكسان أي $I(\bar{z}) - I(z)$.

مثـــال 1 إيجاد الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي لعدد مركَّب

اكتب العدد المركَّب $z = \frac{1-2i}{1+2i}$ على الصورة الجبرية، وجِد جزءه الحقيقي وجزءه التخيّلي.

الحل

$$z = \frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$ اضرب البسط والمقام بمرافق المقام للتخلُّص من i في المقام.

$$z = \frac{1-2i-2i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{1-4i-4}{1+4} = \frac{-3-4i}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

الجزء الحقيقي لِـ z هو $R(z) = -\frac{3}{5}$ وجزؤه التخيّلي هو $I(z) = -\frac{4}{5}$.



1. اكتب العدد المركَّب $z = (2-3i)(5i-4)(-7(i-1))$ على الصورة الجبرية وجِد جزءه الحقيقي وجزءه التخيّلي.

إلى جانب الصورة الجبرية للعدد المركَّب، هناك الصورة المثلثية والصورة القطبية اللتان تستعملان لحل مسائل كثيرة بطرائق مختصرة.



الصورة المثلثية

النقطة M في الشكل المقابل هي نقطة العدد المركّب $z = x + iy$ ($z \neq 0$). تحدِّد هذه النقطة عددًا موجبًا r هو المسافة بينها وبين نقطة الأصل O، وعددًا حقيقيًّا آخر هو القياس بالراديان للزاوية الموجّهة θ التي يكوّنها المتَّجه OM مع النصف الموجب من المحور x . يُسمّى العدد الأوّل **مطلق** العدد المركَّب z، ويُرمز إليه بالرمز $|z|$. كما يُسمّى العدد الثاني **زاوية قطبية** للعدد المركَّب ويُرمز إليه بالرمز $\arg(z)$.

لاحظ أن مطلق العدد المركّب محدَّد من دون أي التباس، بينما يشوب تحديد زاويته القطبية بعض الالتباس. فإذا كان $\frac{\pi}{3}$ قياس زاوية قطبية للعدد المركب z مثلاً، فإن $\frac{\pi}{3} + 2n\pi$، حيث n عدد صحيح، قياس آخر لها. يدفعنا هذا الأمر إلى الحديث عن **زاوية قطبية** للعدد المركَّب، وليس عن **الزاوية القطبية** للعدد المركَّب.

إذا عدت إلى الشكل أعلاه، بوسعك أن تكتب $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$
وبالتالي $z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

الصورة المثلثية لعدد مركَّب

الصورة المثلثية لعدد مركَّب $z = x + iy$ ($z \neq 0$) هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ،
حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$

مثـــال 2 كتابة عدد مركَّب على الصورة المثلثية

اكتب العدد المركَّب $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ على الصورة المثلثية.

الحل

ابدأ بإيجاد المطلق.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

جِد زاوية قطبية.

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

وبالتالي $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ لأن النقطة M_z تقع في الربع الأول من المستوي الإحداثي.

الصورة المثلثية للعدد المركَّب z هي $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.



2. اكتب العدد المركَّب $z = 2\sqrt{3} + 2i$ على الصورة المثلثية.

الصورة الثالثة لكتابة الأعداد المركَّبة هي الصورة القطبية (وتسمّى أحيانًا الصورة الأسّيَّة). وهي اختصار عملي للصورة المثلثية.

الصورة القطبية

يُعرِّف العاملون في حقل الرياضيات الكتابة $e^{i\theta}$ كما يلي $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ مما يسمح بكتابة أي عدد مركَّب $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، مختلف عن 0، على الصورة $z = re^{i\theta}$. تُسمّى هذه الكتابة **الصورة القطبية** للعدد المركَّب z. قد تتساءل عن العلاقة بين $e^{i(\theta+\theta')}$ وكل من $e^{i\theta}$ وَ $e^{i\theta'}$.
هل ترتبط هذه الكتابات بالعلاقة $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ كما هي حال القوى حيث $a^{x+y} = a^x a^y$؟
الجواب على هذا التساؤل هو: نعم. يُمكنك إثبات ذلك كما يلي:

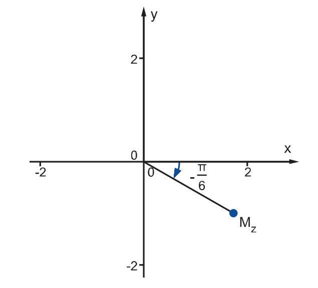
$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + i^2\sin\theta\sin\theta' \\ &= \cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')} \end{aligned}$$

الصورة القطبية لعدد مركَّب

الصورة القطبية لعدد مركَّب $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ هي $z = re^{i\theta}$،
حيث $r = \sqrt{x^2+y^2}$ وَ $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

مثـــال 3 كتابة عدد مركَّب على الصورة القطبية

اكتب العدد المركَّب $z = \sqrt{3} - i$ على الصورة القطبية.



الحل

ابدأ بإيجاد المطلق.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

جد زاوية قطبية.

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

وبالتالي $\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ لأن النقطة M_z تقع في الربع الرابع من المستوي الإحداثي.

الصورة القطبية للعدد المركَّب z هي $z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

نقطة مراقبة

3. اكتب العدد المركَّب $z = -2 + 2i$ على الصورة القطبية.

خصائص المطلق والزاوية القطبية لعدد مركَّب

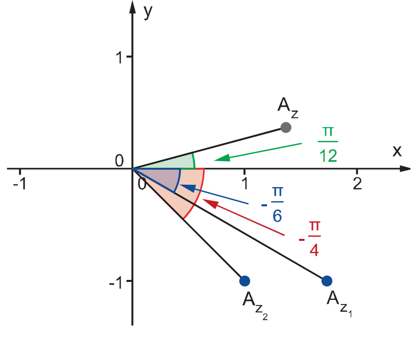
أ $\lvert z\rvert \geq 0$ وَ $\lvert z\rvert = 0$ إذا، وفقط إذا، $z = 0$	ب $\lvert z_1 z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert$ وَ $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$
ج $\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$ وَ $\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$	د $\lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
أ $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$	ب $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$
ج $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$	د $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$

مثـــال 4 استعمال خصائص القيمة المطلقة والزاوية القطبية

جِد مطلق كل عدد مركَّب وجِد زاوية قطبية له.

أ $z_1 = \sqrt{3} - i$ ب $z_2 = 1 - i$ ج $z = \frac{z_1}{z_2}$

استخلص قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$ وَ $\sin\frac{\pi}{12}$.



الحل

احسب القيمة المطلقة لكل عدد.

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

احسب زاوية قطبية لكل عدد.

$\tan\theta_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \arg(z_1) = \theta_1 = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi$ لأن النقطة z_1 تقع في الربع الرابع.

$\tan\theta_2 = -1 \Rightarrow \arg(z_2) = \theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ لأن النقطة z_2 تقع في الربع الرابع.

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi - \left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = \frac{\pi}{12} + 2(m-n)\pi$$

يُكتب العدد المركَّب z على الصورة المثلثية كما يلي: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

لكي تجد قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$ وَ $\sin\frac{\pi}{12}$ ، اكتب z على الصورة الجبرية.

ينتج من ذلك أن: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i = z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} \quad \text{وَ} \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

إذن، $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ وَ $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.



4. جِد مطلق كل عدد مركّب وجِد زاوية قطبية له.

أ $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ ب $z_2 = 1 + i$ ج $z = \frac{z_1}{z_2}$

استخلص قيمة كل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ وَ $\sin\frac{7\pi}{12}$.

مبرهنة 7–1 De Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

لهذه المبرهنة أهمية كبرى في تبسيط بعض المقادير. كما تستعمل هذه المبرهنة في علم المثلثات لأنها تساعد على إثبات كثير من المتطابقات.

مثـــال 5 تطبيق على علم المثلثات

اكتب المقدار $\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4$ على أبسط صورة.

الحل

$$\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4=\cos 4\frac{\pi}{12}+i\sin 4\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



.5 اكتب المقدار $\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)^6$ على أبسط صورة.

مثـــال 6 إيجاد متطابقات مثلثية

جِد متطابقتين لكتابة $\cos 3\theta$ وَ $\sin 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$ وَ $\sin\theta$.

الحل

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$$
$$=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta$$

غير أن:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

بالاستناد إلى مبرهنة De Moivre. معنا إذن:

$$\cos 3\theta+i\sin 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$

بالتالي فإن:

$$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta \quad \text{وَ} \quad \cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$$



.6 جِد متطابقتين لكتابة $\cos 2\theta$ وَ $\sin 2\theta$ بدلالة $\cos\theta$ وَ $\sin\theta$.

جذور الواحد

تعرف أن للواحد جذرين تربيعيين هما 1 وَ 1−، وأن له جذرًا تكعيبيًّا واحدًا هو 1. يصح القول الأخير لو اقتصرت على مجموعة الأعداد الحقيقية. لكن إذا توسّعت إلى مجموعة الأعداد المركَّبة، تجد، كما سترى، أن للواحد ثلاثة جذور تكعيبية.

> **جذور الواحد**
>
> نقول عن عدد مركب $z=re^{i\theta}$ أنه **جذر للواحد** من الرتبة n، حيث n عدد صحيح موجب، إذا حقّق $z^n=1$.

إذا كتبت المعادلة $z^n=1$ مستعملاً الصورة القطبية للعددين z وَ1، تحصل على

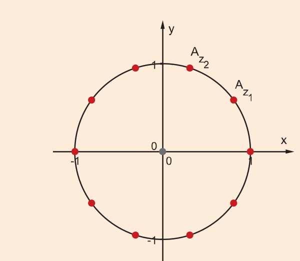
$$z^n=r^ne^{in\theta}=1=1\times e^{i\times 0}$$

وهذا يُنتج أن: $\begin{cases}r^n=1\\ n\theta=0+2k\pi\end{cases}$ وبالتالي فإن: $\begin{cases}r=1\\ \theta=\frac{2k\pi}{n}\end{cases}$.

كل قيمة تُعطى لِـ k تحدِّد جذرًا للواحد من الرتبة n .

مبرهنة 7–2 جذور الواحد

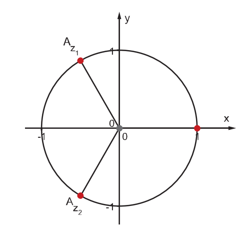
أيًّا يكن العدد الصحيح الموجب n ، فإن للواحد n جذرًا من الرتبة n، تُشكِّل هذه الجذور رؤوس مضلّع منتظم، وتقع جميعها على دائرة الوحدة.





مثــــال 7 الجذور التكعيبية للواحد

جد الجذور التكعيبية للواحد، وعيّن نقاطها في المستوي الإحداثي.



الحل

هناك ثلاثة جذور تكعيبية للواحد هي
$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$، $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$.

يستعمل العاملون في حقل الرياضيات رمزًا خاصًّا للجذر التكعيبي $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. هذا الرمز هو j .
يُمكنك أن تُبيّن بسهولة أن $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}$.

نقطة مراقبة 7. جِد جذور الواحد من الرتبة 4، وعيّن نقاطها في المستوي الإحداثي.

1–7 التمارين

في التمارين من 1 إلى 12، اكتب العدد المركَّب على الصورة الجبرية.

1. $(1+i)^2$
2. $(1-i)^2$
3. $(1+3i)^2$
4. $(1-3i)^2$
5. $(1+i)^3$
6. $(1-i)^3$
7. $(3+4i)(3-4i)$
8. $(3+2i)^3$
9. $\frac{i-5}{3+5i}$
10. $\frac{3+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}$
11. $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}$
12. $\frac{4+5i}{2-i}+\frac{1-3i}{1+i}$

في التمارين من 13 إلى 20، اكتب العدد المركَّب على الصورة المثلثية والصورة القطبية.

13. $z=1+i$
14. $z=1-i$
15. $z=i$
16. $z=9i$
17. $z=-6$
18. $z=8$
19. $z=1+i\sqrt{3}$
20. $z=1-i\sqrt{3}$

في التمارين من 21 إلى 25، اكتب العدد المركَّب على الصورة القطبية، علمًا بأن $z = re^{i\theta}$.

21 $\frac{1}{z}$ 22 $\overline{z}$ 23 iz 24 z^3 25 $\frac{ie^{i\alpha}}{z^2}$

26 اكتب، على الصورة القطبية، كلا من العددين المركَّبين:

أ $z = \left(1-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$ ب $z = 1+\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}$

27 أثبت أن $|-z| = |z|$ وأن $|\overline{z}| = |z|$.

28 أثبت أن $|z|^2 = z\,\overline{z}$. استعمل هذه النتيجة لكي تُثبت أن $|z\,z'| = |z||z'|$.

29 أثبت أن $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ، حيث $z \neq 0$.

30 أثبت أن $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ ، حيث $z \neq 0$.

31 جِد الأعداد المركَّبة z التي تُحقِّق $|1+z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z|$. حيث $z \neq 0$.

32 جِد الأعداد المركَّبة z التي تُحقِّق $|1-z| = |\overline{z}| = \left|z^2\right|$.

في التمارين من 33 إلى 37 اكتب كل عدد مركَّب على الصورة المثلثية حيث α عدد حقيقي.

33 $z = \sin\alpha + i\cos\alpha$ 34 $z = \cos\alpha - i\sin\alpha$

35 $z = -\cos\alpha - i\sin\alpha$ 36 $z = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$

37 أجب عما يلي إذا علمت أن: $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

أ اكتب j على الصورة القطبية، واستنتج أن هذا العدد المركَّب جذر تكعيبي للواحد.

ب جِد j^2 ، وبيّن أنه جذر تكعيبي غير حقيقي للواحد مختلف عن j .

ج بيّن أن $j^{3m} = 1$ وَ $j^{3m+1} = j$ وَ $j^{3m+2} = j^2 = \overline{j}$ وَ $1+j+j^2 = 0$.

حول المفاهيم

38 ما عدد جذور الواحد من الرتبة n في رأيك؟

2–7 الأعداد المركَّبة والهندسة

Complex Numbers and Geometry

الأهداف

- يُفسّر هندسيًّا العمليات على الأعداد المركَّبة.
- يحل مسألة هندسية باستعمال الأعداد المركَّبة.

المفردات Vocabulary

- عدد النقطة Affix of the point
- نقطة العدد المركَّب Point of the complex number
- عددالمتَّجه Affix of the vector
- متَّجه العدد المركَّب Vector of the complex number
- الصورة المركَّبة Complex form

تعلَّمت في الدرس السابق أن نقاط المستوي والأعداد المركَّبة تتقابل بحيث تُحدد كل نقطة $M(x, y)$ عددًا مركَّبًا وحيدًا $z_M = x+iy$ هو **عدد النقطة** $M(x, y)$، ويُحدِّد كل عدد مركَّب $z = x+iy$ نقطة وحيدة $M_z(x, y)$ هي **نقطة العدد المركَّب** $z = x+iy$. من ناحية أخرى، يُحدِّد كل متَّجه $\vec{u}\langle a, b\rangle$ عددًا مركَّبًا $z_{\vec{u}} = a+ib$ هو **عدد المتَّجه**، كما يُحدِّد كل عدد مركَّب $z = p+iq$ متَّجهًا $\vec{v}_z\langle p, q\rangle$ هو **متَّجه العدد المركَّب** $z = p+iq$.

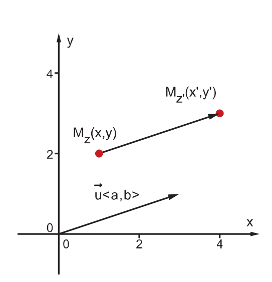
يسمح التقابل بين الأعداد المركَّبة من ناحية ونقاط المستوي ومتَّجهاته من ناحية أخرى، بتمثيل العمليات على الأعداد المركَّبة هندسيًّا كما يسمح بالتعبير عن حالات هندسية جبريًّا. هذا ما سوف تتعلَّمه في هذا الدرس.

جمع الأعداد المركَّبة

ليكن $u = a+ib$ عددًا مركَّبًا وَ $\vec{u}\langle a, b\rangle$ متَّجهه. إذا جمعت u إلى عدد مركَّب $z = x+iy$ تحصل على العدد المركَّب

$$z' = z+u = (x+iy)+(a+ib) = (x+a)+i(y+b)$$

إذا كانت $M(x, y)$ نقطة العدد المركَّب z وَ $M'(x', y')$ نقطة العدد المركَّب z' فإن $\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$ مما يُثبت أن M' هي صورة M بسحب متَّجهه $\vec{u}\langle a, b\rangle$.



التفسير الهندسي لجمع الأعداد المركَّبة
جمع عدد مركَّب u مع عدد مركَّب z يحوِّل نقطة العدد z بسحبٍ متَّجهه $\vec{u}$.

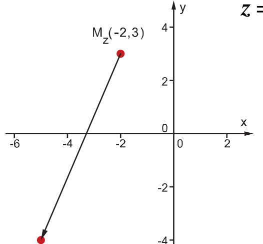
مثـــال 1 إيجاد متَّجه سحب

ما متَّجه السحب الذي يُحوِّل نقطة العدد المركَّب $z = -2+3i$ إلى نقطة العدد المركَّب $z' = -5-4i$.

الحل

إذا كان $\vec{u}\langle a, b\rangle$ متَّجه السحب الذي يُحوِّل M_z إلى $M_{z'}$ فإن $\begin{cases} -5 = (-2)+a \\ -4 = (3)+b \end{cases}$ مما يُعطي $a = -3$ وَ $b = -7$.

المتَّجه $\vec{u}\langle a, b\rangle$ هو $\vec{u}\langle -3, -7\rangle$.





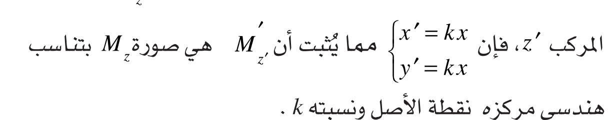
1. ما متّجه السحب الذي يُحوّل نقطة العدد المركّب $z=6-2i$
إلى نقطة العدد المركّب $z'=6+4i$ ؟

ضرب عدد مركّب في عدد حقيقي

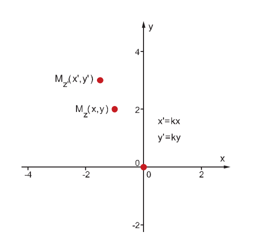
ليكن $z=x+iy$ عددًا مركّبًا وَ k عددًا حقيقيًا. إذا ضربت z في k تحصل على العدد المركّب

$$z'=kz=k(x+iy)=(kx)+i(ky)$$

إذا كانت $M_z\ (x,\ y)$ نقطة العدد المركّب z وَ $M'_{z'}(x',y')$ نقطة العدد



المركب z'، فإن $\begin{cases}x'=kx\\ y'=kx\end{cases}$ مما يُثبت أن $M'_{z'}$ هي صورة M_z بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته k .



التفسير الهندسي لضرب عدد مركّب في عدد حقيقي

ضرب عدد مركّب z في عدد حقيقي k يحوِّل نقطة العدد z بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته k .

مثـــال 2 إيجاد نسبة تناسب هندسي

ما نسبة تناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ويُحوّل نقطة العدد المركّب $z=-5+2i$ إلى نقطة العدد المركّب $z'=10-4i$ ؟

الحل

إذا كانت $M_z\ (x,\ y)$ نقطة العدد المركّب z وَ $M'_{z'}(x',y')$ نقطة العدد المركّب z'،
وإذا كان العدد الحقيقي k نسبة تناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ويُحوّل
M_z إلى $M'_{z'}$ ، فإن $\begin{cases}10=k(-5)\\ -4=k(2)\end{cases}$. ينتج من ذلك $k=-2$.



2. ما نسبة تناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ويُحوّل نقطة العدد المركّب $z=6-2i$ إلى نقطة العدد المركّب $z'=3-i$.

بالاستنادِ إلى ما سبق، فإن تحويل نقطة M بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته العدد الحقيقي k، يعود إلى ضرب z_M ، عدد النقطة M ، في العدد الحقيقي k وتعيين نقطة العدد المركّب الناتج $z'=kz$. تُسمّى الكتابة $z'=kz$ ، **الصورة المركّبة** لهذا التناسب الهندسي.
ما الصورة المركّبة لتناسب هندسي مركزه النقطة A ونسبته العدد الحقيقي k ؟

الكتابة المركّبة للتناسب الهندسي

الكتابة المركبة لتناسب هندسي مركزه النقطة A ونسبته العدد الحقيقي k هي $z'-a=k(z-a)$ حيث $a=z_A$ العدد المركّب للنقطة A .

مثــــــال 3 إيجاد صورة نقطة بتناسب هندسي

ما صورة النقطة $M(3, -3)$ بتناسب هندسي مركزه النقطة $A(1,1)$ ونسبته العدد الحقيقي $-\frac{1}{2}$ ؟

الحل

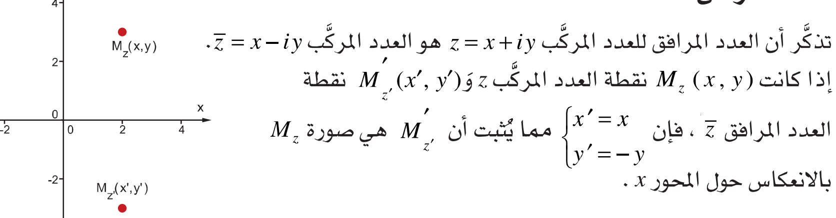
لدينا $m = z_M = 3-3i$ وَ $a = z_A = 1+i$. إذا كانت M' صورة M
بالتناسب الهندسي وَ $m' = z_{M'}$، فإن $m' - a = -\frac{1}{2}(m-a)$
$$m' = -\frac{1}{2}(m-a)+a = -\frac{1}{2}\big(3-3i-(1+i)\big)+(1+i) = 3i$$
صورة النقطة $M(3, -3)$ بالتناسب الهندسي هي النقطة $M'(0, 3)$.



3. استعمل الرسم السابق. ما صورة النقطة $M(4,-4)$ بتناسب هندسي مركزه النقطة $A(-1,-1)$ ونسبته العدد الحقيقي $-\frac{1}{4}$؟

العدد المرافق

تذكَّر أن العدد المرافق للعدد المركَّب $z = x+iy$ هو العدد المركَّب $\overline{z} = x-iy$.
إذا كانت $M_z(x, y)$ نقطة العدد المركَّب z وَ $M'_{z'}(x', y')$ نقطة العدد المرافق $\overline{z}$ ، فإن $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ مما يُثبت أن $M'_{z'}$ هي صورة M_z بالانعكاس حول المحور x .



التفسير الهندسي للعدد المرافق
الانتقال من عدد مركَّب z إلى العدد المرافق $\overline{z}$ يحوِّل نقطة العدد z بالانعكاس حول المحور x .

مثــــــال 4 صورة نقطة عدد مركَّب بالانعكاس حول المحور x

ما صورة نقطة العدد المركَّب $z = -5(2-i)-2i(3i+1)$ بالانعكاس حول المحور x؟

الحل

ابدأ بكتابة العدد المركَّب على الصورة الجبرية.
$$z = -5(2-i)-2i(3i+1) = -10+5i-6(i^2)-2i$$
$$z = -4+3i$$
نقطة العدد المركَّب z هي $M_z(-4, 3)$. صورة هذه النقطة بالانعكاس حول المحور x هي النقطة $M'_{z'}(-4, -3)$.



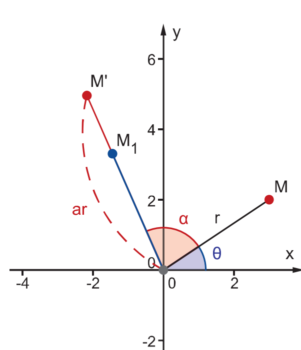
4. ما صورة نقطة العدد المركَّب $z = 3(-7i+14)(8-11i)$ بالانعكاس حول المحور x؟

ضرب الأعداد المركَّبة (للاطلاع)

التفسير الهندسي لضرب عدد مركَّب في آخر أكثر تعقيدًا من التفسيرات السابقة. سوف نستعمل الصورة المثلثية لكتابة الأعداد المركَّبة لأنها تسهل الوصول إلى النتيجة.

ليكن $u = ae^{i\alpha}$ عددًا مركَّبًا مطلقه a، وَ α زاوية قطبية له. إذا ضربت u في عدد مركَّب $z = re^{i\theta}$ تحصل على العدد المركَّب

$$z' = zu = re^{i\theta}ae^{i\alpha} = (ra)e^{i(\theta+\alpha)}$$



إذا كانت M_z نقطة العدد المركَّب z وَ $M'_{z'}$ نقطة العدد المركَّب z'

فإن $\begin{cases} r' = ar \\ \theta' = \theta + \alpha + 2k\pi \end{cases}$ ، حيث $z' = r'e^{i\theta'}$.

إذا أمعنت النظر في الشكل المقابل تجد أن تحويل M_z إلى $M'_{z'}$ يتم على مرحلتين: تحويل M_z إلى M_1 بدوران مركزه نقطة الأصل وزاويته $\alpha = \arg(u)$، ثم تحويل M_1 إلى $M'_{z'}$ بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته $a = |u|$ (مطلق العدد المركَّب u).

التفسير الهندسي لضرب الأعداد المركَّبة

ضرب عدد مركَّب z في عدد مركَّب u يحوِّل نقطة العدد z بدوران مركزه نقطة الأصل وزاويته $\arg(u)$، يتبعه بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته $|u|$.

مثـــال 5 تحويل نقطة باستعمال ضرب الأعداد المركَّبة

بيّن أن من الممكن تحويل العدد المركَّب $z = 1+i$ إلى نقطة العدد المركَّب $z' = 2\sqrt{2}(1-i)$ بدوران مركزه نقطة الأصل يتبعه بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل. ما زاوية الدوران؟ وما نسبة التناسب الهندسي؟

الحـل

يكفي أن تجد عدد مركَّبًا u بحيث تحصل على z' نتيجة لضرب z في u. بما أن u يجب أن يحقّق $z' = uz$ وبما أن $z \neq 0$ فإن $u = \frac{z'}{z}$. استعمل الصورة القطبية لكتابة عدد مركَّب.

اكتب $z = re^{i\theta}$ وَ $z' = r'e^{i\theta'}$. جد أوَّلاً مطلق وزاوية كل من العددين المركَّبين z وَ z' .

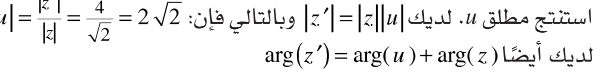
$|z| = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$؛ $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$ وَ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

مما يعني أن $\theta = \frac{\pi}{4} + 2m\pi$.

$|z'| = |2\sqrt{2}(1-i)| = 2\sqrt{2}|1-i| = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}) = 4$؛

$\tan\theta' = \frac{-1}{1} = -1$ وَ $0 \leq \theta' \leq -\frac{\pi}{2}$

مما يعني أن $\theta' = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$.



استنتج مطلق u. لديك $|z'| = |z||u|$ وبالتالي فإن: $|u| = \frac{|z'|}{|z|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

لديك أيضًا $\arg(z') = \arg(u) + \arg(z)$

وبالتالي:

$$\arg(u)=\arg(z')-\arg(z)=\theta'-\theta=\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)-\left(\frac{\pi}{4}-2m\pi\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

حيث $k=n-m$.

إذن، زاوية الدوران هي $-\frac{\pi}{2}$ ونسبة التناسب الهندسي هي $2\sqrt{2}$.



5. بيّن أن من الممكن تحويل نقطة العدد المركَّب $z=1-i$ إلى نقطة العدد المركَّب $z'=\sqrt{2}(1+i)$ بدوران مركزه نقطة الأصل، متبوع بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل. ما زاوية الدوران؟ وما نسبة التناسب الهندسي؟

يُمكنك بالاستناد إلى ما سبق، تحويل نقطة M بدوران مركزه نقطة الأصل عن طريق ضرب عدد النقطة M في عدد مركَّب مطلقه 1. بتعبير آخر، لتحويل النقطة M بدوران مركزه نقطة الأصل وزاويته θ، اضرب العدد المركَّب $m=z_M$ (عدد النقطة M) في العدد المركَّب $e^{i\theta}$ (العدد المركَّب الذي مطلقه 1 وَ θ زاوية قطبية له)، وعيِّن نقطة العدد المركَّب الناتج $z'=e^{i\theta}z$. تُسمّى الكتابة $z'=e^{i\theta}z$ **الصورة المركَّبة** Complex form لدوران مركزه نقطة الأصل وزاويته θ .

ما الصورة المركبَّة لدوران مركزه النقطة A وزاويته θ ؟

الصورة المركَّبة للدوران (للاطلاع)

الكتابة المركَّبة لدوران مركزه النقطة A وزاويته θ هي $z'-a=e^{i\theta}(z-a)$ ، حيث $a=z_A$ العدد المركب للنقطة A .





مثال 6 صورة نقطة بالدوران

ما صورة النقطة $M(3,-3)$ بدوران مركزه النقطة $A(1,1)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$؟

الحل

$m=z_M=3-3i$ ، $a=z_A=1+i$. صورة M بالدوران هي النقطة $M'=M_{m'}$ حيث $m'-a=e^{i\theta}(m-a)$.

$$m'=e^{i\frac{2\pi}{3}}(3-3i-(1+i))+(1+i)$$
$$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(2-4i)+1+i$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-4i)+1+i=2\sqrt{3}+i\left(3+\sqrt{3}\right)$$

صورة النقطة $M(3,-3)$ بالدوران هي النقطة $M'=\left(2\sqrt{3},\ 3+\sqrt{3}\right)$.



6. ما صورة النقطة $M(4,-4)$ بدوران مركزه النقطة $A(-1,-1)$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ ؟

يمكن الإفادة من العلاقة بين الأعداد المركَّبة والنقاط في المستوي الإحداثي، لحل مسائل هندسية، أو لإقامة بعض البراهين في مجال الهندسة.

2-7 التمارين

في التمارين من 1 إلى 6، اكتب العدد المركَّب لصورة النقطة M بالتحويل المعيّن.

1 $M(2, -1)$ ؛ سحب متَّجهه $\vec{u}\langle -3, 2\rangle$

2 $M(-3, 5)$ ؛ سحب متَّجهه $\vec{u}\langle 2, -2\rangle$

3 $M(2, 0)$ ؛ دوران مركزه نقطة الأصل وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

4 $M(2, 1)$ ؛ تناسب هندسي نسبته $\frac{3}{2}$.

5 $M(-1, 3)$ ؛ انعكاس حول المحور x .

6 $M(4, 1)$ ؛ انعكاس حول المحور y .

7 ما مجموعة النقاط M التي تُحقّق $|z-a|=r$ حيث a عدد مركَّب معيّن وَ r عدد حقيقي موجب؟

8 ما صورة الدائرة $|z-1|=1$ بالتحويل الذي يُحوّل M_z إلى $M_{z'}$ حيث $z'=(1+i)z+2-i$.

9 ما التحويل الهندسي الذي يُعبّر عن ضرب عدد مركَّب في i ؟

10 جِد مجموعة الأعداد المركَّبة z بحيث تكون النقاط M_z ، M_{z^2} ، M_{z^4} على استقامة واحدة.

الفصل 7

مراجعة الفصل

في التمارين من 1 إلى 5، اكتب العدد المركَّب على الصورة الجبرية.

1 $\frac{3+6i}{3-4i}$

2 $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}$

3 $\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$

4 عدد مركَّب مطلقه 2 وله زاوية قطبية $\frac{\pi}{3}$.

5 عدد مركَّب مطلقه 3 وله زاوية قطبية $-\frac{\pi}{6}$.

6 اكتب على أبسط صورة المقدار $(3+2i)(1-3i)$.

7 اضرب العدد المركَّب الذي مطلقه 2 وله زاوية قطبية $\frac{\pi}{3}$ في العدد المركَّب الذي مطلقه 3 وله زاوية قطبية $\frac{-5\pi}{6}$.

8 اكتب على أبسط صورة المقدار $\frac{3+2i}{1-3i}$.

9 اقسم العدد المركَّب الذي مطلقه 2 وله زاوية قطبية $\frac{\pi}{3}$ على العدد المركَّب الذي مطلقه 3 وله زاوية قطبية $\frac{-5\pi}{6}$.

10 اكتب، على الصورة القطبية، كلاً من العددين المركَّبين $u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ وَ $v=1-i$ ، ثم اكتب على الصورة نفسها العدد المركَّب $w=\frac{u}{v}$.

11 اكتب العدد المركَّب $u=\dfrac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ على الصورة الجبرية، ثم على الصورة المثلثية. استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ ، $\sin\frac{\pi}{12}$ ، $\tan\frac{\pi}{12}$ ، $\tan\frac{5\pi}{12}$. بيّن أن u حل للمعادلة $z^{24}=1$.

الفصل 7 تحضيـــر للاختبـــار

1 الجزء الحقيقي للعدد المركَّب $z=(2+i)^2$ هو:

أ 2 ب 4 ج 3 د 1

2 الجزء التخيُّلي للعدد المركَّب $z=(1-i)^2$ هو:

أ -2 ب -1 ج 0 د -2

3 مطلق العدد المركَّب $z=4+3i$ هو:

أ 7 ب $\sqrt{7}$ ج 5 د $\sqrt{5}$

4 أي من قياسات الزوايا أدناه، زاوية قطبية للعدد المركَّب $z=2-2i$ ؟

أ $\frac{\pi}{4}$ ب $-\frac{\pi}{4}$ ج $\frac{\pi}{2}$ د $\frac{3\pi}{4}$

5 عدد مركَّب مطلقه 2 وله زاوية قطبية $\frac{\pi}{3}$ ، أي مما يلي كتابة z على الصورة الجبرية؟

أ $\sqrt{3}+i$ ب $1+i\sqrt{3}$ ج $2+i\frac{\pi}{3}$ د $\sqrt{3}-i$

6 مجموعة حلول المعادلة $z^2+z+1=0$ هي: (تذكر أن $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$)

أ المجموعة الخالية $\varnothing$

ب $\left\{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

ج $\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

د $\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$

7 A هي نقطة العدد المركَّب $a=1+i$ وَ B نقطة العدد المركب $b=1-i$. أي مما يلي مجموعة النقاط M التي تحقّق $|z_M-1-i|=|z_M-1+i|$ ؟

أ المستقيم AB

ب منتصف القطعة المستقيمة AB

ج الدائرة التي قطرها $\overline{AB}$

د محور $\overline{AB}$

8 A ، B ، C نقاط في المستوى الإحداثي تحقّق $z_A=z_C-z_B$. أي مما يلي صحيح؟

أ $OABC$ متوازي أضلاع، حيث O نقطة الأصل.

ب النقاط A ، B ، C على استقامة واحدة.

ج A منتصف $\overline{BC}$

د B منتصف $\overline{AC}$

9 A هي نقطة العدد المركَّب $a=1+i$، وَ B نقطة العدد المركَّب $b=3-i$. أي مما يلي صحيح؟

أ $AB=2.82$ ب $AB=0$ ج $AB=\sqrt{10}-\sqrt{2}$ د $AB=2\sqrt{2}$

10 A هي نقطة العدد المركَّب $a=1+i$، وَ B نقطة العدد المركَّب $b=3-i$. H منتصف $\overline{AB}$ وَ $h=z_H$. أي مما يلي صحيح؟

أ $h=1-i$ ب $h=2$ ج $h=2-2i$ د $h=-2$

بعض المتطابقات المثلثية التي يحتاجها الطالب في الصف الثاني عشر
$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \begin{cases}\sin^2 x=1-\cos^2 \\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\end{cases}$
$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$
$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$
$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$
$\sin 2x=2\sin x\cos x$
$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, $\cos 2x=2\cos^2 x-1$
$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$
$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$
$\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$, $\tan(-x)=-\tan x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$
$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x$